

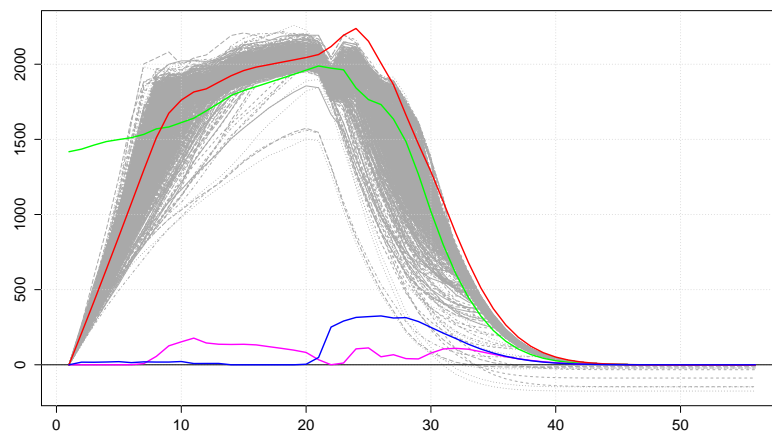
LMU MÜNCHEN

MASTERARBEIT

Risikomanagement für Variable Annuitäten

Autor:
Felix Vogt

Betreuer:
Christian Groll



28. September 2014

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, den 28. September 2014

.....
Felix Vogt

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Variable Annuitäten	6
2.1	Einführung in Variable Annuitäten	6
2.2	Historischer Kontext	8
2.3	Garantien	9
3	Szenario Generator	13
3.1	Aktienindex	14
3.2	Zinsen	18
3.3	Abhängigkeitsstruktur	28
3.4	Sterbetafel	32
3.5	Gütetests	34
4	Modellierung	38
4.1	Analyse der Szenarien	39
4.2	Zahlungsströme	43
4.3	Berechnung der Rendite	45
4.4	Berechnung der Reserven	50
5	Risikomanagement	55
5.1	Modellrisiko	56
5.2	Schätzrisiko	68
6	Ausblick	73
6.1	Solvency II	73
6.2	Zinsmodelle	73
6.3	Hedging	74
6.4	Bewertung der Garantien	75
7	Zusammenfassung	78
A	Übersicht über die Zahlungsströme	82
B	Abkürzungsverzeichnis	83
C	Rückstellungen für verschiedene Zinsniveaus	84

Abbildungsverzeichnis

1	Kurs und Rendite des S&P 500	15
2	QQ Plots der Normalverteilung und t Verteilung	17
3	Kurse einer Treasury Bill von 1991 bis 2014 mit einjähriger Laufzeit	21
4	Simulierte Zinsraten im Vasicek Modell	23
5	Histogramm der transformierten Aktienrenditen	29
6	Histogramm der transformierten Zinsraten	30
7	Histogramm der Rendite für die Treasury Bill von 1991 bis 2008 mit geschätzter Gammaverteilung	37
8	Übersicht über die zeitliche Abfolge der Zahlungsströme für einen beispielhaften Pfad	40
9	Überblick über die simulierten Aktienkurse	43
10	Erwartete, diskontierte Auszahlungen aus Sicht des Versicherungs- nehmers	47
11	Erwartete, diskontierte Einnahmen des Versicherers	49
12	Erwarteter, diskontierter Gewinn aus Sicht des Versicherers . . .	49
13	Reserven unter Solvency II	51
14	Übersicht über die Rückstellungen eines Vertrags	53
15	Reserven bei veränderten Mittelwerten der Aktienrendite	57
16	Rückstellungen bei einer jährlichen Aktienrendite von 5.00% . . .	58
17	Rückstellungen bei einer jährlichen Aktienrendite von 2.50% . . .	59
18	Reserven bei einer erhöhter Volatilität der Aktienrendite	61
19	Rückstellungen bei einer um 5% erhöhten Volatilität der Aktien- rendite	62
20	Rückstellungen bei einer um 10% erhöhten Volatilität der Akti- enrendite	63
21	Veränderung der Reserven unter Solvency II bei Langlebigkeits- risiken	66
22	Rückstellungen bei einer um 10% niedrigeren Sterbewahrschein- lichkeit	66
23	Verteilung des geschätzten Parameters der Copula ρ mithilfe von Bootstrap	69
24	Resampling von Zeitreihen für Zinsraten mittels Block Bootstrap	72
25	Rückstellungen für ein Zinsniveau von 0.5%	84
26	Rückstellungen für ein Zinsniveau von 1.5%	84
27	Rückstellungen für ein Zinsniveau von 2.5%	85

28	Rückstellungen für ein Zinsniveau von 3.5%	85
29	Rückstellungen für ein Zinsniveau von 4.5%	86

Tabellenverzeichnis

1	Log Likelihood, AIC und BIC für verschiedene GARCH(p,q) Modelle	17
2	Geschätzte Parameter im Vasicek Modell für den Zeitraum 1991 bis 2014	21
3	Geschätzte Parameter im Vasicek Modell für das Jahr 2003	22
4	Geschätzte Parameter im CIR Modell für den Zeitraum 1991 bis 2001	26
5	Kritische Werte für die Verteilung des Aktienindex	35
6	Kritische Werte für die Verteilung der Zinsrate	36
7	Deskriptive Beschreibung der simulierten Zinsen	41
8	Deskriptive Beschreibung der simulierten Aktienrendite	42
9	Deskriptive Beschreibung der erwarteten Auszahlung aus Sicht des Versicherungsnehmers	46
10	Barwerte der Zahlungsströme bei verringerter jährlicher Aktienrendite	60
11	Barwerte der Zahlungsströme bei erhöhter Volatilität der Aktienrendite	61
12	Barwerte der Zahlungsströme für unterschiedliche Zinsniveaus . .	64
13	Barwerte der Zahlungsströme bei Langlebigkeitsrisiken	65
14	Ergebnisse des Block Bootstrap Verfahrens für den Aktienindex für eine Blockgröße von 9 Handelstagen	70
15	Ergebnisse des Block Bootstrap Verfahrens für den Aktienindex für eine Blockgröße von 250 Handelstagen	70

1 Einführung

Wer auf Rosen gebettet ist, erfreut sich im Volksmund der glücklichen Lage Besitzer eines stolzen Vermögens zu sein. Allzu oft vergeht die Freude am Geld jedoch wieder, wenn es um dessen Anlage geht. Die Vielfalt an Finanzprodukten ist groß, es existieren Bausparverträge, Investmentfonds und Lebensversicherungen, man kann sein Geld in Gold anlegen oder doch nur auf dem Konto belassen - Zinsen gibt es aktuell ohnehin kaum. Als Anbieter von Finanzprodukten fungieren zudem Banken, Bausparkassen aber auch Versicherungsunternehmen, so dass die Qual der Wahl umso höher ist.

Der sicherste Weg der Geldanlage für den Verbraucher bleibt, sich mit der Produktvielfalt auseinanderzusetzen und seine Ziele abzustecken. Erst das Verständnis des passenden Finanzprodukts bietet die Sicherheit, Risiken adäquat einschätzen zu können. Diese Arbeit wagt eine solche Analyse für so genannte Variable Annuitäten. Diese sind eine Kombination aus indexgebundener Lebens- und Rentenversicherung, die zudem durch Garantien abgesichert ist und somit das obere Ende der Palette an komplizierten Anlageprodukten darstellt.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Risiken und Chancen rund um Variable Annuitäten abzuschätzen. Dabei soll nicht nur die Anlegerperspektive berücksichtigt werden, sondern vor allem auch das Risikomanagement für den Versicherer. Wie sich zeigen wird, sind die Risiken für den Verbraucher relativ gering, während der Versicherer einer Bandbreite von potenziellen Gefahren ausgesetzt ist. Diese gilt es zu beleuchten und durch geeignete Modelle abzusichern.

Variable Annuitäten sind kein Alltagsprodukt wie beispielsweise eine Haftpflichtversicherung, deshalb wird das Produkt in Kapitel 2 eingehender erläutert. Neben der Entstehung und Entwicklung von Variablen Annuitäten im historischen Kontext stehen vor allem die Garantien im Mittelpunkt, welche die Komplexität des Produktes ausmachen.

Als nächstes werden in Kapitel 3 dieser Arbeit in einem ersten Schritt ökonomische Szenarien generiert, für die anschließend Gewinne und Verluste auf Seiten des Versicherungsnehmers als auch des Versicherers berechnet werden können. Dazu werden Modelle zur Simulation eines Aktienindex, einer Zinsrate, sowie deren Abhängigkeitsstruktur vorgestellt und anhand von historischen Daten kalibriert.

In Kapitel 4 werden die Ausprägungen der Pfade in den Szenarien berechnet und analysiert. Damit lassen sich die Zahlungsströme des Vertrages ermitteln, die

vorab ebenfalls ausführlich beschrieben werden um die Komplexität von Variablen Annuitäten anhand eines Rechenbeispiels zu verstehen. Anschließend kann die erwartete Rendite sowohl aus Sicht des Versicherungsnehmers, als auch für den Versicherer bestimmt werden. Für Letzteren können zudem die notwendigen Reserven für das Risikomanagement berechnet werden, um das es in dieser Arbeit vorrangig geht.

Nachdem die Szenarien ausgewertet wurden, wird in Kapitel 5 das Risikomanagement eingehender studiert. Wie sich herausstellen wird, ist es nicht ausreichend die Reserven für jede Periode zu berechnen, vielmehr muss die zeitliche Abfolge der Zahlungsströme Berücksichtigung finden. Im Anschluss werden die verwendeten Modelle und Schätzverfahren ausführlich untersucht um mögliche Fehlerquellen aufzuspüren.

Kapitel 6 gibt schließlich einen Ausblick auf Themen, die in dieser Arbeit wenig oder gar nicht behandelt wurden. Dies umfasst insbesondere einen Blick auf die Praxis, in der viele der vereinfachenden Annahmen nicht getroffen werden können.

In dieser Arbeit wird aufgrund der Vielzahl an Themen eine Bandbreite an Literatur verwendet, eine ausführliche Liste mit den entsprechenden Referenzen befindet sich im Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit. Dennoch wird an dieser Stelle ein kurzer Überblick über die wichtigsten Quellen gegeben.

Die Vertragsparameter, wie beispielsweise die Höhe der Gebühren für den Versicherer werden in dieser Arbeit als gegeben betrachtet und deshalb nicht diskutiert. Bauer et al. (2008) geben einen guten Überblick wie sich die Vertragsparameter in der Praxis berechnen lassen, der Artikel ist deshalb im Hinblick auf das Grundverständnis von Variablen Annuitäten sinnvoll zu erwähnen.

Ein Großteil der verwendeten Literatur wird zur Generierung der Szenarien verwendet. Für die Simulation des Aktienindex sind die Artikel von Bollerslev (1986) und Bollerslev (1987), sowie das Buch von Ruppert (2011) besonders erwähnenswert. Als Zinsmodell wird das so genannte Cox-Ingersoll-Ross Modell implementiert, der theoretische Hintergrund kann anhand von Cox et al. (1985) nachvollzogen werden. Für die Kalibrierung des Zinsmodells in der Praxis ist darüber hinaus die Arbeit von Kladvko (2007) äußerst hilfreich. Bei der Berechnung der Abhängigkeitsstruktur ist erneut das Kapitel über Copulas im Buch von Ruppert (2011) eine wichtige Quelle, darüber hinaus finden die Ergebnisse von Aas et al. (2009) in dieser Arbeit eine Anwendung.

2 Variable Annuitäten

2.1 Einführung in Variable Annuitäten

In ihrer ursprünglichen Form sind Variable Annuitäten nichts anderes als eine fondsgebundene Rentenversicherung. Der Versicherungsnehmer zahlt eine Prämie in einen festgelegten Fonds ein und bekommt in bestimmten zeitlichen Abständen eine Rente ausbezahlt. Die Art des Fonds richtet sich nach den Risikopräferenzen des Versicherungsnehmers, die eingezahlte Prämie ist eine Art Guthaben auf einem Konto, das sich je nach Marktentwicklung vergrößert oder verringert. Die periodischen Rentenzahlungen verringern das Guthaben ebenfalls. Wie auch in der klassischen Lebensversicherung wird der Restbetrag im Todesfall an die Angehörigen des Versicherungsnehmers ausbezahlt.

Während diese Form der Versicherung in den USA bereits unter dem Namen Variable Annuitäten vertrieben wird, beinhaltet sie in Deutschland typischerweise zusätzliche Garantien um als solche vermarktet zu werden. Die verschiedenen Arten von Garantien werden in Abschnitt 2.3 erläutert. Wenn in dieser Arbeit von Variablen Annuitäten die Rede ist, sind immer Versicherungen gemeint, die auch Garantien beinhalten.

Eine Besonderheit von Variablen Annuitäten ist, dass dieselben Steuervorteile wie bei einer klassischen Lebensversicherung gelten. Für Deutschland bedeutet dies konkret, dass Leistungen nur hälftig besteuert werden, sofern die Versicherungsleistungen erst nach einer Laufzeit von mindestens zwölf Jahren und nach Vollendung des 60. Lebensjahres erfolgen. Aus diesem Grund ist die Zielgruppe für Variable Annuitäten in Deutschland in der Regel in Bereichen kurz vor oder im rentenfähigen Alter. In anderen Ländern gelten ähnliche steuerliche Vorteile.

Die Zahlungsströme aus Sicht des Versicherungsnehmers beinhalten bei einer Variablen Annuität ohne zusätzliche Garantien drei Komponenten. Am Zeitpunkt des Vertragsabschlusses muss zuerst eine Prämie gezahlt werden die fast vollständig in einen gewählten Fonds überführt wird. Ein bestimmter Anteil wird üblicherweise von der Versicherung einbehalten um Fixkosten wie beispielsweise entstandene Vertriebskosten zu decken. Der einbehaltene Anteil beläuft sich auf einen prozentualen Anteil der Prämie, ein geläufiger Wert sind fünf Prozent. Je nach Präferenz kann die Prämie durch eine Einmalzahlung oder durch mehrere Einzahlungen geleistet werden.

Die zweite Komponente ist die Annuität. In periodischen Abständen wird ein

Teil des Guthabens an den Versicherungsnehmer ausgezahlt, die Frequenz ist Bestandteil der Vertragskonditionen, üblich sind monatliche, vierteljährliche, halbjährliche oder jährliche Zahlungen. Die Höhe der Rente ist ebenfalls vorab festgelegt, oft wird dazu ein prozentualer Wert der Prämie bestimmt, der als Absolutwert periodisch ausbezahlt wird. Liegt der Wert beispielsweise bei 3%, erhält der Versicherungsnehmer regelmäßig 300 Euro bei einer ursprünglichen Prämie von 10.000 Euro. Die Rente einer Variablen Annuität wird auch dann weiter ausbezahlt, wenn das Guthaben auf null gesunken ist, die Zahlungen laufen also bis zum Lebensende des Versicherungsnehmers.

Schließlich erfolgt bei Vertragsende eine letzte Zahlung die aus dem Restwert des Guthabens besteht. Das Vertragsende kann durch drei verschiedene Ereignisse eintreten. Der natürlichste Fall ist das vorzeitige Ableben des Versicherungsnehmers. In diesem Fall kommt der Lebensversicherungscharakter der Variablen Annuität zum Vorschein, da Angehörige eine Restsumme ausgezahlt bekommen. Der zweite Fall ist eine vorzeitige Stornierung des Vertrages, bei dem das restliche Guthaben abzüglich einer Stornogebühr ausbezahlt wird. Schließlich kann auch ein vorzeitiges Ende vertraglich festgelegt sein, bei dem ebenfalls das Restguthaben an den Versicherungsnehmer ausgezahlt wird.

Für den Versicherer ergeben sich die eingehenden Zahlungsströme dagegen komplett aus den Gebühren, die vom Versicherten verlangt werden. Bei Vertragsabschluss fällt die bereits erwähnte Gebühr für Fixkosten an. Während der Laufzeit werden verschiedene Gebühren erhoben, die sich je nach Versicherungsunternehmen unterscheiden. Dem Grunde nach werden diese Einnahmen jedoch genutzt um laufende Kosten zu decken. Dazu zählen Fondsgebühren, sowie Gebühren zur Deckung der Verwaltungskosten, weiterhin wird für jede optionale Garantien eine Gebühr erhoben.

Zu beachten ist bei dieser Art der Versicherung, dass der Versicherer lediglich indirekt an den Gewinnen und Verlusten aus dem Fonds beteiligt ist. Die Gebühren werden in jeder Periode als prozentualer Anteil vom Guthaben des Versicherungsnehmers berechnet. Steigt das Guthaben in Folge einer positiven Fondsentwicklung, steigen gleichzeitig die Einnahmen aus den Gebühren et vice versa.

2.2 Historischer Kontext

Im historischen Kontext sind Variable Annuitäten im Vergleich zur klassischen Lebensversicherung äußerst jung. Während erste Formen der Lebensversicherung bereits im römischen Kaiserreich existierten, lassen sich die ersten Variablen Annuitäten auf das Jahr 1952 datieren. Damals wurden sie noch ohne Garantien von einer Pensionskasse für Lehrer herausgegeben, dem „College Retirement Equities Fund“ der „Teachers Insurance and Annuity Association“. Nach lediglich sechs Jahren betrug der Umfang der Prämieinnahmen bereits damals beachtliche 200 Millionen Dollar, insgesamt waren 175.000 Personen versichert.

Aufgrund von verschärften regulatorischen Vorschriften erfreute sich das Produkt jedoch schon bald keiner großen Beliebtheit mehr, so dass das Wachstum bis in die achtziger Jahre stagnierte. Die Einführung einer garantierten Todesfallleistung änderte dies schlagartig, fortan verzeichneten Variable Annuitäten in den USA stetiges Wachstum. Mit der Einführung weiterer Garantien wuchs der Markt für Variable Annuitäten in den USA weiter und eroberte auch Japan in den neunziger Jahren, sowie Europa ab der Jahrtausendwende.

Die Produkteinführung in Japan war vor allem durch eine Deregulierung des Finanzsektors begünstigt, die es ausländischen Unternehmen erlaubte, im japanischen Versicherungs- und Bankensektor tätig zu werden. Der Markt wuchs anschließend rasant an, von etwa 1 Mrd. Dollar um die Jahrtausendwende auf das Fünfzigfache fünf Jahre später. Ein wichtiger Faktor in Japan war die Generation der Baby-Boomer in den fünfziger Jahren, die um die Jahrtausendwende in der Haupt-Zielgruppe für Variable Annuitäten waren. Doch auch die andauernde Niedrigzinsphase begünstigte den Erfolg aller Arten von fondsgebundenen Versicherungen.

Die späte Einführung in Europa hatte ebenfalls regulatorische Gründe. So ist im deutschen Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) geregelt, dass Deckungsrückstellungen für Garantien selbst dann gebildet werden müssen, wenn diese perfekt abgesichert sind. Die daraus resultierenden Rückstellungen sind in der Summe so hoch, dass kein Versicherungsunternehmen bereit ist, das notwendige Kapital aufzubringen. Da jedoch innerhalb der Europäischen Union auch für Versicherer ein freier Handel gilt, wurden Tochtergesellschaften in Irland oder Luxemburg gegründet, für welche die oben beschriebene Problematik durch den jeweiligen Regulierer nicht zutrifft.

In Deutschland wurden Variable Annuitäten bisher von drei Versicherern an-

geboten: Der Allianz, AXA, sowie der R+V. Aufgrund ähnlicher Strukturen wie in Japan - niedrige Zinsen, sowie eine Baby-Boomer Generation im Alter der Zielgruppe - erwartete man große Erfolge, die jedoch ausblieben. Vielmehr zogen sich alle drei Versicherer nach den Verwerfungen an den Aktienmärkten im Zuge der jüngsten Finanzkrise und daraus resultierenden Problemen im Risikomanagement aus dem Markt zurück. Aktuell existiert somit kein Anbieter mehr, der Variable Annuitäten in Deutschland vertreibt.

Insgesamt wurden Variable Annuitäten mit der Zeit immer komplexer, dies lag vor am Einfallsreichtum der Versicherer die immer neue Garantien mit verschiedensten Optionen kombinierten. Während so in den achtziger Jahren lediglich garantierte Leistungen im Todesfall existierten (GMDB), wurden mit der Jahrtausendwende garantierte Sparsummen nach vertraglich festgelegter Ablaufzeit (GMAB) und garantierte Rentenauszahlungen (GMWB) eingeführt.

2.3 Garantien

Variable Annuitäten grenzen sich gegenüber der klassischen Lebensversicherung über zusätzliche Garantien ab. In der Essenz sind diese Garantien eine Form von Derivaten auf verschiedene Bestandteile des Versicherungsvertrags. Dies bedeutet, dass Garantien auch als Solche bewertet werden, so dass die traditionelle Bewertung von Lebensversicherungsverträgen an ihre Grenzen stößt.

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Garantien erläutert, der Fokus liegt in diesem Abschnitt auf den Auswirkungen auf die Zahlungsströme, sowie der Bewertung der Garantien. Alle vier Garantien sind eine Art von Option, so dass die Bewertung in der Regel aufwendig ist.

Guaranteed Minimum Death Benefit

Der Guaranteed Minimum Death Benefit, kurz GMDB, ist eine Garantie, die erst beim Tod des Versicherungsnehmers wirksam ist. Der Hintergedanke dieser Art von Garantie ist der Schutz des Vermögens vor Verwerfungen am Aktienmarkt, so dass den Hinterbliebenen eine garantierte Mindestsumme hinterlassen wird. Die Garantie knüpft somit stark an den Grundgedanken der klassischen Lebensversicherung an.

Die Berechnung der garantierten Auszahlung bei Todesfall erfolgt lediglich anhand der ursprünglichen gezahlten Prämie, sowie der Variablen Annuität. Zu

Vertragsbeginn ist der GMDB genau gleich dem Anfangsguthaben. Am Ende jeder Periode wird die ausbezahlte Annuität vom GMDB der Vorperiode subtrahiert. Fällt das tatsächliche Guthaben auf null, dann erlischt auch die Garantie, dies hat den Hintergrund, dass nur ein vorhandenes Vermögen durch die Garantie geschützt werden soll.

Der GMDB ist eine Option mit unbekannter Laufzeit, die Garantie endet erst mit dem Todeszeitpunkt des Versicherungsnehmers der zu Vertragsbeginn unbekannt ist. Der Ausübungszeitpunkt der Option ist jeweils am Periodenende, der Ausübungspreis ist zu Vertragsbeginn ebenfalls unbekannt, da dieser von der Höhe der Annuität abhängt. Lediglich für den Spezialfall, dass die Annuität über die gesamte Vertragslaufzeit konstant ist, kann der Ausübungspreis in jeder Periode vorab bestimmt werden.

Die Bewertung ist somit nicht analytisch möglich, so dass der Wert der Garantie lediglich über Simulationsverfahren berechnet werden kann.

Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

Als zweite Garantie wird der Guaranteed Minimum Accumulation Benefit, in der Kurzform GMAB, eingeführt. Diese Art der Option betrifft die Rendite auf das Guthaben des Versicherungsnehmers für einen bestimmten Zeitraum. Bei Vertragsbeginn wird ein Zeitpunkt festgelegt, an dem das Guthaben einen gewissen Mindestbetrag erreicht haben muss. Wird dieser Betrag nicht realisiert, trägt der Versicherer die Differenz zwischen dem vereinbarten Betrag und dem tatsächlichen Guthaben. Ziel der Garantie ist die zugesicherte Realisierung einer bestimmten Mindestrendite. Der Versicherungsnehmer partizipiert somit lediglich an positiven Entwicklungen des Fonds, während er die Risiken gegen eine Gebühr an den Versicherer überträgt. Falls die Entwicklung des Investments die garantierte Rendite übertrifft, ist die Option wertlos.

Diese Art von Garantie entspricht einer klassischen europäischen Option. Die Fälligkeit, sowie der Ausübungspreis der Option sind vertraglich festgelegt, Gegenstand der Option ist das Guthaben. Entsprechend einfach gestaltet sich auch die Bewertung der Garantie für den Versicherer, diese kann analytisch, beispielsweise mit Hilfe der Formel von Black und Scholes bewertet werden. Das Auszahlungsprofil der Garantie entspricht der Short-Position einer Put Option.

Guaranteed Minimum Income Benefit

Eine andere Form von Garantie ist der Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB), dieser sichert eine Mindestverzinsung auf eine lebenslang gezahlte Annuität. Durch die Garantie wird zum einen die Rente vor Verlusten auf dem Aktienmarkt abgesichert und zum anderen wird eine jährliche Rentensteigerung sichergestellt.

Zu Vertragsbeginn wird die Höhe der Rente als Anteil der ursprünglichen Prämie festgelegt. Die Annuität hängt im Verlauf des Vertrags direkt von der Höhe des Guthabens und damit vom Verlauf des Investments ab. Bei Verwerfungen auf den Märkten kommt es ohne die Garantie auf diese Weise zu einer Verringerung der Rente. In diesem Fall greift die Garantie: Der Versicherer berechnet das theoretische Guthaben bei einer vereinbarten jährlichen Mindestverzinsung. Die Rente wird anhand des größeren Wertes aus dem theoretischen und dem tatsächlichen Guthaben berechnet. Liegt ein Fehlbetrag vor, kommt der Versicherer für diesen auf.

Auch diese Art der Garantie ist eine Option, die analytisch nicht bewertet werden kann. Zwar liegt ein klar definierter Ausübungspreis vor, jedoch kann keine eindeutige Laufzeit angegeben werden. Die Option kann jeweils am Ende einer Periode ausgeübt werden und endet mit dem Tod des Versicherungsnehmers. Dabei hat die Option auch dann Bestand, wenn sie einmal ausgeübt wurde.

Aus diesem Grund kann der Guaranteed Minimum Income Benefit als exotische Option klassifiziert werden. Da für diese keine analytischen Bewertungsmethoden existieren, muss der Wert der Option über Simulationsverfahren festgestellt werden.

Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit

Schließlich bezieht sich der Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB) ebenfalls auf die Annuität. Diese wird dahingehend besichert, dass sie nicht unter das Niveau der Vorperiode sinken kann, selbst wenn das Guthaben stark fällt.

Die Höhe der Anfangsrente wird vertraglich festgelegt. An jedem Periodenende wird dann die Annuität anhand des aktuellen Guthabens berechnet und mit der Zahlung aus der Vorperiode verglichen. Liegt der Wert der aktuellen Periode unter dem der Vorperiode wird die Rente nicht gesenkt. Somit sind, anders als beim Guaranteed Minimum Income Benefit ausschließlich Rentensteigerungen möglich.

Die Garantie gilt selbst bei einem Guthaben von Null, so dass eine lebenslange Rente gezahlt wird. Der Versicherer muss für mögliche Fehlbeträge aufkommen, die durch Langlebigkeit oder durch eine schlechte Entwicklungen des Investments entstehen.

Die Garantie ist ebenfalls eine exotische Option und muss als solche mit Hilfe einer Simulation bewertet werden. Dies liegt erneut an der ungewissen Laufzeit der Option. Diese endet bei Ausübung oder spätestens beim Tod des Versicherungsnehmers. Beide Ereignisse sind jedoch zufällig und bei Vertragsbeginn unbekannt. Zudem erneuert sich die Option bei Ausübung, wobei der Ausübungspreis steigt.

3 Szenario Generator

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Methodik zur Abschätzung der Risiken für Variable Annuitäten vorzustellen. In der Praxis werden dazu die für den Vertrag relevanten Parameter simuliert um wiederum die notwendigen Reserven bestimmen zu können. Zu den relevanten Parametern zählen in diesem Kontext:

- Ein Aktienindex
- Der Zinssatz
- Sterbetafeln
- Stornoraten

Sowohl Aktienindizes, als auch Daten bezüglich Zinsraten sind frei verfügbar, Sterbetafeln sind ebenfalls spezifisch für jedes Land vorhanden. Stornoraten sind abhängig vom Marktumfeld und dem jeweiligen Versicherungsunternehmen. Da diesbezüglich keine Daten vorliegen wird in dieser Arbeit vereinfachend davon ausgegangen, dass keine vorzeitige Stornierung existiert.

In dieser Arbeit werden die verwendeten Modelle für den US amerikanischen Markt kalibriert, da die vorhandenen Datensätze am umfangreichsten sind. Zur Kalibrierung des Modells zur Simulation des Aktienindex in Kapitel 3.1 wird der S&P 500 verwendet, eine Zeitreihe mit den täglichen Kursen steht beispielsweise auf Yahoo Finance frei zur Verfügung.

Mit dem benötigten Zinssatz ist der Marktzins gemeint, der zur Diskontierung der Ergebnisse verwendet wird. Da dieser nicht direkt beobachtet werden kann, wird hier auf einen Datensatz von der Federal Reserve zurückgegriffen. Die Daten beinhalten die jährlichen Renditen auf amerikanische Treasury Bills mit einjähriger Laufzeit. Es ist jedoch ebenso möglich andere Zeitreihen zur Bestimmung des Marktzinses zu verwenden, dazu zählt beispielsweise der Leitzinssatz. Die Modellierung des Zinses wird in Kapitel 3.2 erläutert.

Da Aktienkurse und Zinsraten einer gewissen Abhängigkeitsstruktur unterliegen wird diese ebenfalls modelliert. Dazu wird in Kapitel 3.3 eine Gauß-Copula geschätzt, aus der die jeweiligen Fehlerterme simuliert werden können.

Die Sterbetafel stammt für die USA von der „Society of Actuaries“ (SOA)¹ und ist für die Verwendung in Versicherungsunternehmen vorgesehen, die genaue Implementierung ist in Kapitel 3.4 dargestellt. Alle weiteren Datengrundlagen sind

¹<http://mort.soa.org/>

Bestandteil des Vertrages und werden vor der eigentlichen Simulation festgelegt.

Insgesamt werden in dieser Arbeit 1000 Pfade simuliert. Jeder Pfad besteht aus je einer Zeitreihe von Aktienrenditen, dem Zinssatz und einer Sterbewahrscheinlichkeit des jeweiligen Individuums. Alle Daten werden auf jährlicher Basis benötigt. Die Länge der Pfade hängt vom Alter des Individuums bei Vertragsabschluss ab, die Zahlungsströme werden immer bis zu einem Maximalalter von 115 Jahren berechnet. Für einen Sechzigjährigen würden alle Parameter somit für 55 Jahre simuliert werden.

3.1 Aktienindex

Jedem Lebensversicherungsvertrag liegt ein Kapitalinvestment zu Grunde, auch Variable Annuitäten bilden keine Ausnahme. Die Art Geld anzulegen unterscheidet sich je nach Vertragsart, Lebensversicherungen bei denen der Versicherer das Geld erhält gehören dabei für den Anleger zu den sicheren Investments, da der Versicherer eine Rendite garantiert. Variable Annuitäten hingegen bilden das andere Ende auf der Risikoskala, ein großer Anteil des Geldes wird mit den bekannten Chancen und Risiken in Aktien investiert.

Die Modellierung und Simulation von Aktienrenditen kann ein kompliziertes Unterfangen sein, insbesondere wenn der Zeithorizont hoch ist, wie es in dieser Anwendung der Fall ist. Die Tatsache, dass in dieser Arbeit lediglich jährliche Renditen benötigt werden erleichtert die Modellierung jedoch erheblich.

Nichtsdestotrotz werden zur Berechnung tägliche Renditen simuliert, dies hat zahlreiche Vorteile und lediglich den geringfügig größeren Aufwand als Nachteil. Zum einen spielen Ausreißer, wie sie in Simulationen durchaus vorkommen eine untergeordnete Rolle, da diese bei jährlicher Betrachtung täglicher Renditen nicht zu sehr ins Gewicht fallen und sich zudem im Erwartungswert zeitlich ausgleichen.

Zum anderen kann auf ein einfaches Modell zurückgegriffen werden, da erneut der zeitliche Effekt mögliche Fehler in der Modellierung ausgleicht. Von hoher Wichtigkeit ist demnach, dass der Erwartungswert der Rendite über ein Jahr plausibel ist.

Als Datengrundlage werden tägliche Kurse des S&P 500 über Yahoo Finance abgerufen. Die Beobachtungen reichen von 1991 bis einschließlich 2013. Zwar liegen weitere Beobachtungen vor 1991 vor, dennoch wird der Datensatz aus zwei Gründen eingeschränkt. Erstens ist der Datensatz zur Schätzung der Abhängigkeitsstruktur in Kapitel 3.3 ebenfalls auf einen Zeitraum ab 1991 eingeschränkt. Zweitens führen zusätzliche Beobachtungen bei der vorliegenden Größe des Datensatzes nur zu unwesentlichen Veränderungen im Modell, dies liegt auch daran, dass Aktienrenditen zeitlich relativ homogen sind. Insgesamt umfasst der Datensatz 5796 Beobachtungen.

Aus den täglichen Kursen lassen sich Renditen anhand der ersten Differenz der logarithmierten Daten berechnen. Diese weisen typische Eigenschaften von Finanzdaten auf, in den unten stehenden Plots erkennt man beispielsweise deutlich die Volatilitätscluster. Darüber hinaus lässt sich leicht zeigen, dass sich die Verteilung der Renditen stärker um den Erwartungswert zentriert, als es beispielsweise die Normalverteilung impliziert.

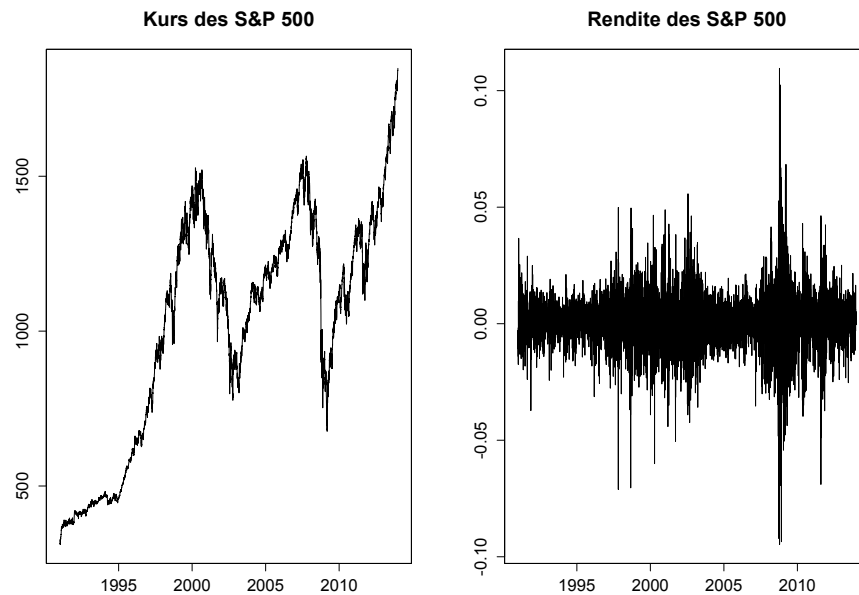


Abbildung 1: Kurs und Rendite des S&P 500

Um die idiosynkratischen Eigenschaften der Finanzdaten zu berücksichtigen wird ein GARCH(p, q) Modell verwendet, die Modellgleichungen ergeben sich wie folgt:

$$y_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (2)$$

Der aktuelle Aktienkurs zum Zeitpunkt t wird mit y_t bezeichnet, μ ist hier der Erwartungswert der Aktienrendite, ε_t steht für den Fehlerterm. Im ursprünglichen GARCH-Modell von Bollerslev (1986) folgt ε_t einer Standardnormalverteilung, jedoch können die starken Ausreißer bei Finanzdaten selbst durch ein GARCH Modell, das diese besonders berücksichtigt, nicht adäquat anhand einer Normalverteilung erklärt werden. Zur Modellierung der so genannten „Fat Tails“ wird deshalb für den Fehlerterm ε_t eine nicht-standardisierte t-Verteilung angenommen.

Die Notwendigkeit dieser Verteilungsannahme kann wie in Ruppert (2011) anhand eines Jarque-Bera Tests gezeigt werden. Schätzt man ein GARCH(1,1) Modell mit normalverteiltem ε_t , ergibt sich für den Test ein p-Wert nahe Null, so dass die Nullhypothese normalverteilter Innovationen ε_t abgelehnt werden kann. Dieses Ergebnis kann auch anhand eines QQ-Plots gezeigt werden, in der folgenden Abbildung erkennt man deutlich, dass für die Normalverteilung die Ränder nicht passend modelliert werden. Hingegen scheinen t-verteilte ε_t angebracht, wie der rechte Plot deutlich belegt. Die Anwendung dieser Verteilungsannahme in einem GARCH Modell für Finanzdaten wird in Bollerslev (1987) ausführlich erläutert.

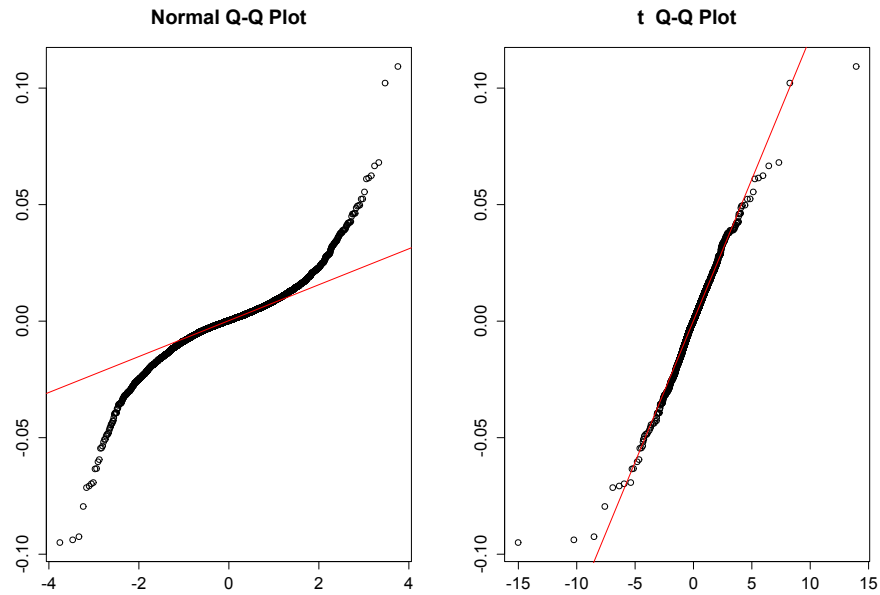


Abbildung 2: QQ Plots der Normalverteilung und t Verteilung

Die Wahl von p und q im GARCH Modell erfolgt anhand des Akaike Informationskriteriums (AIC) beziehungsweise des Bayesschen Informationskriteriums (BIC), beide werden für einen Rang von bis zu $p = q = 3$ berechnet.

p	q	Log Likelihood	AIC	BIC
1	1	18961.29	-37912.59	-37879.27
2	1	18970.11	-37928.23	-37888.24
3	1	18970.10	-37926.19	-37879.54
1	2	18961.28	-37910.55	-37870.57
1	3	18961.33	-37908.67	-37862.02
2	2	18971.02	-37928.04	-37881.38
3	2	18970.99	-37925.98	-37872.66
2	3	18971.11	-37926.22	-37872.90
3	3	18971.36	-37924.73	-37864.75

Tabelle 1: Log Likelihood, AIC und BIC für verschiedene GARCH(p,q) Modelle

Die geringen Unterschiede in der Log Likelihood zeigen die große Ähnlichkeit aller betrachteten Modelle. Sowohl das AIC, als auch das BIC favorisieren jedoch ein GARCH(2,1) Modell, das somit in der Modellierung verwendet wird. Damit lautet die Modellgleichung für die Varianz wie folgt.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3)$$

Die Simulation erfolgt schrittweise, dazu werden in Kapitel 3.3 die Fehlerterme ε_t berechnet um den Aktienkurs y_t tageweise zu bestimmen. Weiterhin sind Startwerte y_0 und σ_0 notwendig, deren Relevanz jedoch aufgrund eines Burnins von 100 Schritten eher untergeordnet ist. Aus den Kursen lässt sich dann eine jährliche Rendite berechnen, die das Investment für die Variablen Annuitäten darstellt.

3.2 Zinsen

Die Modellierung der Zinsrate ist im Vergleich zum Aktienindex ein ungleich schwierigeres Unterfangen. Dies liegt an den besonderen Eigenschaften des Zinses, die nur durch komplexe Modelle korrekt abgebildet werden. Bevor das verwendete Modell daher eingehend beschrieben wird, werden die Eigenschaften der Zinsrate vorab erläutert.

Die erste Eigenschaft ist die nicht-Negativität des Zinses. Während Aktien sowohl positive als auch negative Renditen aufweisen, liegt der Zins immer im positiven Bereich. Die höhere Volatilität der Aktien, sowie das Verlustrisiko wird durch eine höhere erwartete Rendite ausgeglichen. Die Zinsrate steht dagegen für positive, wenig schwankende Renditen.

Die jüngste Finanzkrise lässt jedoch Zweifel an der nicht-Negativität der Zinsrate aufkommen. Im Dezember 2011 emittierte Dänemark Staatsanleihen mit einem negativen Zins, auch die Bundesrepublik Deutschland konnte Staatsanleihen mit einer negativen Zinsrate im Januar 2012 erfolgreich am Markt platzieren. In den Medien ist zudem vermehrt davon die Rede, dass die Europäische Zentralbank den Leitzins unter Null senken könnte. Diese Entwicklung spiegelt die große Angst vor größeren Verwerfungen auf den Märkten und dem damit verbundenen Verlust von Vermögen wider.

Obwohl negative Zinsen somit in der Praxis auftauchen, werden sie in der Modellierung dieser Arbeit ausgeschlossen. Es ist unklar, ob es sich bei negativen

Zinsen um ein temporäres Phänomen handelt oder ob auch langfristig ein negativer Zins denkbar ist. Da keine Studien zu dieser Fragestellung existieren, die einen negativen Zins empirisch belegen, wird in dieser Arbeit von einem nicht-negativen Zins ausgegangen. Um die aktuelle Niedrigzinsphase nicht in die Schätzung der Modellparameter aufzunehmen, wird der Datensatz entsprechend beschränkt.

Eine weitere Eigenschaft der Zinsrate ist ihre hohe Autokorrelation. Der Zins schwankt bei täglicher Betrachtung im Vergleich zu Aktienkursen nur sehr wenig, dabei verharrt er üblicherweise auf einem bestimmten Niveau, dieses wird stark durch den Leitzins der Zentralbanken bestimmt.

Zur Modellierung der Zinsrate wird zuerst das Vasicek Modell eingeführt. Anhand eines Datensatzes von US Staatsanleihen werden die Parameter geschätzt, anschließend wird für einen längeren Zeitraum simuliert. Es kann gezeigt werden, dass das Modell erste brauchbare Erkenntnisse liefert, jedoch nicht alle Eigenschaften der Zinsrate abbilden kann.

Als zweites Modell wird das Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell als Erweiterung des Vasicek Modells erläutert. Die Parameter des Modells werden anhand desselben Datensatzes geschätzt, die Simulation zeigt schließlich, dass alle formalen Forderungen an die erzeugten Zinsraten erfüllt sind. Dennoch hat das Modell insbesondere bei der Simulation von langfristigen Zinsraten einige Schwächen.

Der verwendete Datensatz zur Kalibrierung der Modelle stammt von der Federal Reserve². Insgesamt liegen 12984 Beobachtungen über einen Zeitraum von 1962 bis 2014 vor. Es werden die Kurse für eine konstante Fälligkeit von einem Jahr abgerufen, dies ist dahingehend sinnvoll, dass die Berechnungen in dieser Arbeit auf jährlicher Basis stattfinden. Werden die Reserven mit höherer Frequenz, wie beispielsweise monatlich berechnet, ist die Laufzeit entsprechend anzupassen.

²<http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>

Vasicek Modell

Eines der ersten erfolgreichen Modelle zur Beschreibung der Zinsrate stammt von Vasicek (1977). Das Modell verwendet einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess zur Beschreibung der Dynamik des Zinses. Die Änderung des Zinses wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (4)$$

In dieser Gleichung steht W_t für einen Wiener Prozess. Das Modell zeichnet sich zum einen dadurch aus, dass die Differentialgleichung explizit gelöst werden kann und zum anderen, dass die Parameter sinnvoll zu interpretieren sind. Die Parameter können wie folgt beschrieben werden:

α : Geschwindigkeit, mit der sich der Zins dem Mittelwert μ nähert

μ : Langfristiger Mittelwert des Zinsniveaus

σ : Volatilität der Zinsrate

In der Gleichung kann zwischen dem Drift $\alpha(\mu - r(t))dt$ und dem Schock σdW_t unterschieden werden. Liegt der aktuelle Zins r_t unter dem langfristigen Mittelwert μ , dann ist der Drift positiv et vice versa. Dazu muss der so genannte „Mean-Reversion Parameter“ α positiv sein, andernfalls ist die Stationarität des Prozesses nicht mehr gewährleistet.

Für die Simulation gilt weiterhin, dass bei gegebenem Startwert r_0 der Zins langfristig gegen μ konvergiert. In Abwesenheit des Schocks bliebe der Zins bei Erreichen des langfristigen Niveaus konstant. Der Prozess konvergiert daher immer mit Geschwindigkeit α zum langfristigen Mittelwert μ .

Schließlich ist die Zinsrate zum Zeitpunkt t bedingt auf den Zeitpunkt s normalverteilt mit folgendem Erwartungswert und Varianz:

$$E(r_t|r_s) = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)})$$
$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t-s)})$$

Anhand dieser Informationen lassen sich die Parameter des Vasicek Modells mittels Maximum Likelihood schätzen.

Als problematisch erweist sich dabei jedoch der hohe Umfang des Datensatzes. Das Modell hat mit den starken Schwankungen der Zinsrate über die Jahrzehnte Probleme, dies spiegelt sich in den Werten für μ und α wider. Schätzt man das Modell für einen reduzierten Datensatz von 1991 bis 2014, erhält man folgende Werte:

Parameter	Wert
μ	2.00757
α	0.00086
σ	0.08888

Tabelle 2: Geschätzte Parameter im Vasicek Modell für den Zeitraum 1991 bis 2014

Der langfristige Mittelwert μ unterscheidet sich zwar deutlich vom wahren Mittelwert der Zeitreihe, der bei etwa 3.33 liegt, dies kann jedoch in der Praxis vernachlässigt werden, wie auch ein Blick auf den Verlauf des Zinses verrät:

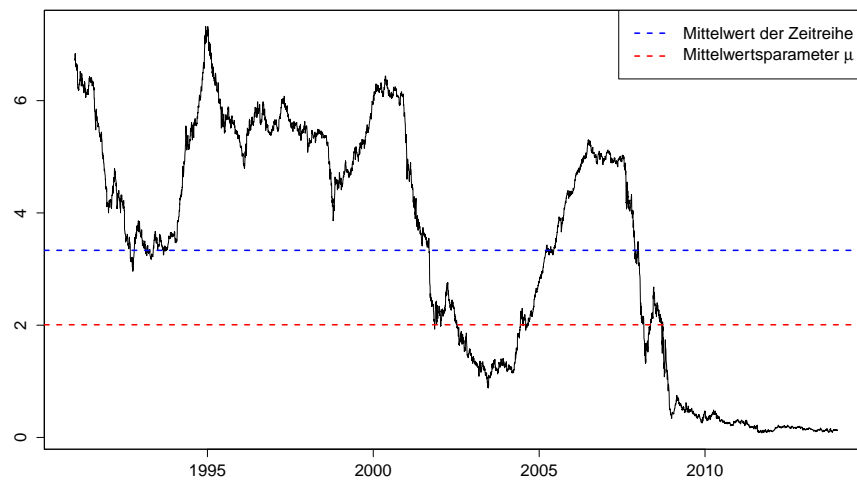


Abbildung 3: Kurse einer Treasury Bill von 1991 bis 2014 mit einjähriger Laufzeit

Die Zinsrate liegt demnach in den vergangenen Jahren unter dem langfristigen Mittelwert, so dass ein entsprechend niedrigeres μ für kurzfristige Simulationen nicht unrealistisch scheint.

Problematischer ist dagegen der Geschwindigkeitsparameter α der einen sehr niedrigen Wert annimmt. Der Grund dafür ist, dass die Zinsrate für die meisten Beobachtungen sehr weit vom langfristigen Mittelwert entfernt ist und sich diesem kaum annähert. In der Simulation führt dies dazu, dass die Pfade auch langfristig stark vom Mittelwertparameter μ abweichen, so dass die Eigenschaft der „Mean-Reversion“ fast komplett verloren geht.

Schätzt man die Parameter des Vasicek Modells hingegen auf einen kurzen Zeitraum, wie beispielsweise ein Jahr, ergibt sich insbesondere für den Parameter α ein deutlich konsistenteres Ergebnis. Für das Jahr 2003 ergeben sich beispielsweise die folgenden geschätzten Werte:

Parameter	Wert
μ	1.24026
α	0.92448
σ	0.148647

Tabelle 3: Geschätzte Parameter im Vasicek Modell für das Jahr 2003

Die Differenz zwischen dem Mittelwert der Zeitreihe von 1.2414 und dem geschätzten Parameter μ liegt hier bei unter 1%, während der „Mean-Reversion“ Parameter α deutlich höher liegt. Bei der Kalibrierung der Parameter ist somit auf einen homogenen Zeitraum zu achten, bei dem die Zinsstruktur über die Zeit konstant bleibt.

Ungeachtet dieser Komplikationen besteht bei der Simulation von Zinsraten mit dem Vasicek Modell ein weiteres Problem. Zwar kehrt die Zinsrate immer zum Mittelwert zurück, jedoch kann diese bei starken Schocks auch unter den Wert Null fallen, obwohl dies in den Daten nicht zu beobachten ist. Besonders problematisch ist dies, wenn der langfristige Mittelwert μ bereits nahe Null liegt, wie es in der jüngsten Vergangenheit der Fall ist.

Simuliert man fünf Zinspfade über eine Zeitspanne von vierzig Jahren, ergeben sich bereits negative Zinsraten, wie der folgende Plot zeigt. Die Parameter werden wie in Tabelle 2 verwendet, der Startwert ist ein Zins von 4%, dieser Wert

liegt zum einen über dem langfristigen Mittelwert μ und ist darüber hinaus weit von einem Wert unter null entfernt. Sieht man von der negativen Zinsrate ab, lässt sich die Mean-Reversion Eigenschaft des Modells gut erkennen. Der Erwartungswert nähert sich über die Zeit vom Startwert dem Mittelwertsparameter μ an.

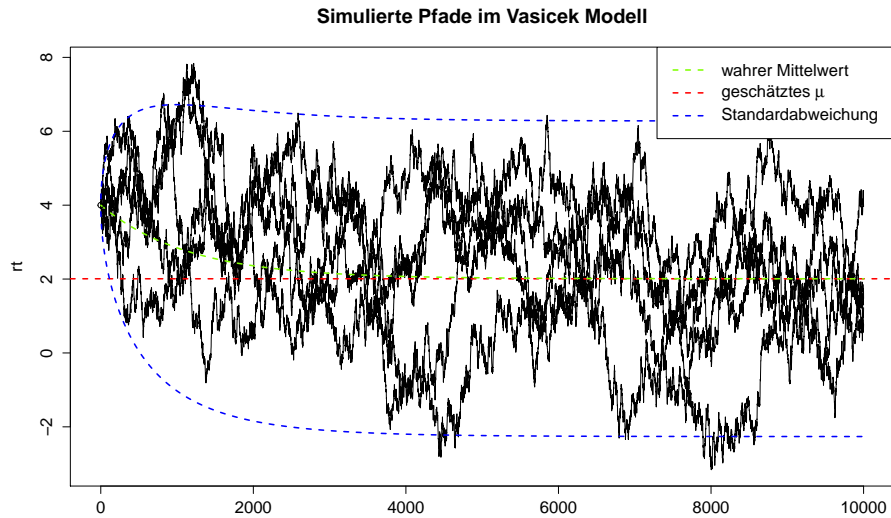


Abbildung 4: Simulierte Zinsraten im Vasicek Modell

Cox-Ingersoll-Ross Modell

Eine Weiterentwicklung des Vasicek Modells, die sich dem Problem der nicht-negativen Zinsen annimmt geht auf Cox et al. (1985) zurück. Die Idee der Arbeit lag darin, den Wurzel-Diffusionsprozess zur Modellierung des Zinssatzes zu verwenden. Die drei Autoren legten damit den Grundstein für das so genannte CIR Modell, das nach fast 30 Jahren immer noch in der Praxis angewandt wird. Das Modell erweitert Gleichung (4), so dass nicht-negative Zinsen nicht mehr auftreten können. Die stochastische Differentialgleichung nimmt folgende Form an:

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (5)$$

Die Parameter des Modells besitzen dieselben Interpretationen wie in beim Vasicek Modell im vorherigen Abschnitt. Im Vergleich zu diesem hängt jedoch

im CIR Modell die Wirkung des Schocks vom aktuellen Zinsniveau ab. Ist der Zins niedrig, schwächt der Standardabweichungs-Term $\sigma\sqrt{r(t)}$ die Wirkung des Schocks ab. Cox et al. (1985) zeigen zudem, dass unter der Bedingung $\alpha, \mu > 0$ der Zins die nicht-Negativitätsbedingung stets erfüllt. Darüber hinaus gilt, dass für $2ab \geq \sigma^2$ der Zins nie Null ist.

Die Erweiterung des Modells führt dazu, dass der Prozess deutlich komplexer wird, insbesondere lässt sich die stochastische Differentialgleichung nicht mehr explizit lösen. Für praktische Anwendungen ist daher die Übergangswahrscheinlichkeit von hohem Interesse, die für das CIR Modell bekannt ist und folgende Form annimmt:

$$r_t|r_{t-1} \sim c \chi_d'^2(\lambda) \quad (6)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist demnach eine nicht-zentrale Chi-Quadrat Verteilung mit d Freiheitsgraden und nicht-Zentralitätsparameter λ , die mit einem konstanten Faktor c multipliziert wird. Die Parameter lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sigma^2(1 - e^{-\alpha})}{4\alpha} \\ d &= \frac{4\alpha\mu}{\sigma^2} \\ \lambda &= \frac{4\alpha e^{-\alpha}}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha})} r_{t-1} \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{c} r_{t-1} \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist hier für $\Delta t = 1$ angegeben, da dies der einzige Fall von Interesse für diese Arbeit ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist jedoch auch für größere Zeitabstände wohl definiert, dazu sei auf die Arbeit von Cox, Ingersoll und Ross verwiesen. Es ist weiterhin leicht zu erkennen, dass sowohl der Parameter der Freiheitsgrade d , als auch der Faktor c für ein fixes Δt konstant sind, während der nicht-Zentralitätsparameter λ vom Zins der Vorperiode abhängt.

Ein weiteres Problem bei der Schätzung des CIR Modells ist, dass der Mittelwertparameter μ zeitlich konstant ist. Dies bedeutet, dass es lediglich ein langfristiges Zinsniveau geben kann. Kalibriert man das CIR Modell jedoch auf

Zeiträume von mehreren Jahren, treten oft mehrere unterschiedliche Zinsniveaus auf. Dies führt dazu, dass die Schätzung der Parameter die Realität nicht korrekt abbilden kann.

Aus diesem Grund existieren zahlreiche Erweiterungen des CIR Modells, in denen beispielsweise der Mittelwertparameter μ zeitabhängig ist. Der große Nachteil all dieser Erweiterungen besteht jedoch darin, dass sich nicht mehr ohne weiteres mit Hilfe des Modells simulieren lässt, da die Übergangswahrscheinlichkeit in Formel (6) nicht mehr bekannt ist.

In dieser Arbeit wird aus diesem Grund eine andere Methodik gewählt. Der Datensatz, der zur Kalibrierung des Modells dient, wird zeitlich restringiert, so dass ein einzelner Mittelwertparameter plausibel ist. Dazu wird sowohl die Hochzinsphase in den Achtziger Jahren, sowie die jüngste Niedrigzinsphase aus dem Datensatz ausgeschlossen. Dies führt zwar zu einer konsistenten Schätzung, jedoch muss in der späteren Analyse berücksichtigt werden, dass weder sehr hohe noch sehr niedrige Zinsen ausreichend durch das Modell abgebildet werden.

Um anhand des CIR Modells simulieren zu können, müssen zuerst die Parameter $\theta = (\alpha, \mu, \sigma)$ geschätzt werden. Kladivko (2007) erläutert die Schätzung sowohl anhand von Maximum Likelihood, als auch über die Methode der kleinsten Quadrate. Zu beachten ist, dass die Parametrisierung der nicht-zentralen Chi-Quadrat Verteilung der Notation von Shao (2012) folgt.

Kleinste Quadrate Schätzung

Um die Parameter mittels KQ Schätzer bestimmen zu können, ist es nötig Gleichung (5) umzuformen, dies geschieht unter der Diskretisierung von r_t :

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta t} - r_t &= \alpha(\mu - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t \\ \Leftrightarrow \frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} &= \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_t}} - \alpha\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t \end{aligned}$$

Die Schätzer für α und μ ergeben sich über:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\mu}) = \arg \min_{\alpha, \mu} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_{t_i}}} + \alpha\sqrt{r_{t_i}}\Delta t \right)^2 \quad (7)$$

Der Schätzer für die Volatilität $\hat{\sigma}$ lässt sich dann über die Standardabweichung der Residuen bestimmen.

Maximum Likelihood Schätzung

Bei insgesamt T Beobachtungen lässt sich die Maximum-Likelihood Funktion mit Hilfe von (6) wie folgt darstellen:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^{T-1} p(r_{t+1}|r_t; \theta, \Delta t) \quad (8)$$

Die log-Likelihood ergibt sich dann als:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T-1} \ln p(r_{t+1}|r_t; \theta, \Delta t) \quad (9)$$

Die Ergebnisse der Schätzung sind in folgender Tabelle dargestellt, weiterhin sind die geschätzten Parameter mit dem Algorithmus von Kladivko (2007) angegeben.

Schätzer	α	μ	σ
KQ	0.1834547	3.2382581	0.4094420
ML	0.1626296	3.236785	0.4100831
Kladivko	0.161071	3.086439	0.410073

Tabelle 4: Geschätzte Parameter im CIR Modell für den Zeitraum 1991 bis 2001

Der KQ Schätzer ist unrestringiert, so dass theoretisch auch negative Werte für α auftreten können. Ein negativer „Mean-Reversion“ Parameter bedeutet, dass sich die Werte langfristig vom Mittelwertparameter μ wegbewegen, diese Interpretation ist jedoch wenig sinnvoll.

In der Schätzung und auch in der Simulation wird ein Δt von $\frac{1}{250}$ verwendet um die Tagesfrequenz der Daten abzubilden. Die Wahl von Δt ist dabei nicht von Bedeutung, so lange der Wert in der gesamten Arbeit konstant bleibt. Es macht jedoch Sinn auf den gewählten Wert zurückzugreifen, da die resultierenden Schätzer problemlos und zügig berechnet werden können. Im Vergleich dazu geht die Bessel Funktion, die zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit

notwendig ist für kleine Werte von α schnell gegen unendlich und so dass die Optimierung fehlschlägt. Dieser Fall tritt beispielsweise bei einem $\Delta t = 1$ von auf.

Der geschätzte Wert für μ für alle drei Schätzer ist schließlich niedriger als der Mittelwert des Datensatzes von 4.3277. Dennoch scheint ein niedrigerer Mittelwertsparameter plausibel, da auch das Zinsniveau des Datensatzes zum Oberen Ende hin niedriger ausfällt. Die entsprechenden Parameter bei der Maximum Likelihood Schätzung unterscheiden sich nur unwesentlich im Vergleich zum KQ Schätzer, der Mean-Reversion Parameter ist lediglich marginal niedriger. Darüber hinaus sind auch die Unterschiede zwischen den Parametern aus der ML Schätzung und der Matlab Implementierung von Kladivko äußerst gering. Die Abweichungen ergeben sich durch die unterschiedliche Implementierung der Bessel Funktion in R und Matlab.

Simulation des Zinssatzes

Die Zinsen lassen sich schließlich mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeit in Formel (6) simulieren. Sind die Parameter des CIR Modells bekannt, ist lediglich ein Anfangszins zu wählen. Langfristig bewegt sich das Zinsniveau zum geschätzten Mittelwertsparameter μ , so dass die Wahl des Anfangszinses lediglich zu Vertragsbeginn einen Einfluss auf die Ergebnisse haben kann.

Die Simulation des Zinses erfolgt für jedes Szenario Schrittweise, dazu wird jeweils aus der bedingten Dichte gezogen. Der nicht-Zentralitäts Parameter λ wird dazu in jedem Schritt neu berechnet, die Freiheitsgrade d und der Faktor c sind dagegen immer konstant.

Es ist zu beachten, dass bei der Berechnung des jährlichen Zinssatzes tägliche Schwankungen berücksichtigt werden müssen. Dazu werden aus den annualisierten Renditen r_t auf die Staatsanleihe tägliche Renditen i_n anhand folgender Formel berechnet:

$$i_n = \left(1 + \frac{r_t}{100}\right)^{\frac{1}{250}} \quad (10)$$

Die täglichen Renditen i_n sind tatsächlich keine echten, täglichen Renditen, da lediglich 250 Tage im Jahr statt 365 unterstellt werden. Die 250 Tage basieren auch in dieser Anwendung auf der Anzahl der Handelstage im Jahr. Im nächsten Schritt lässt sich dann der jährliche Zinssatz anhand des Produkts der

täglichen Zinsrate berechnen. Auf diese Weise hängt der jährliche Zinssatz auch von Schwankungen innerhalb des Jahres ab. Durch die konstante Jahreslänge von 250 Tagen ist die Länge des Produkts in der Simulation immer konstant.

3.3 Abhängigkeitsstruktur

In der Realität besteht eine bestimmte Abhängigkeit zwischen dem Verlauf der Zinsen und des Aktienmarktes. Um diese in den Szenarien entsprechend zu berücksichtigen, wird die Abhängigkeitsstruktur anhand einer Copula modelliert. Die Copula wird, wie auch die Modelle zur Simulation der Aktie und des Zinses anhand der bekannten Datensätze kalibriert. Dazu werden die Beobachtungen nach Datum paarweise zugeordnet, unvollständige Paare werden dabei aussortiert. Damit reduziert sich der Datensatz der Aktien auf den Zeitraum 1991 bis 2008. Insgesamt liegen zur Schätzung der Copula 4247 Beobachtungen vor.

Es wird explizit davon ausgegangen, dass die Abhängigkeitsstruktur zeitlich konstant ist, so dass eine Hinzunahme weiterer Beobachtungen das Ergebnis nicht ändert. Andernfalls würde dies die Modellierung erheblich erschweren. Die Annahme ist auch insofern relevant, da zur Schätzung der Parameter im GARCH Modell die Kurse in Abschnitt 3.1 bis einschließlich 2013 verwendet wurden.

Um die Copula zu schätzen, müssen die Beobachtungen gemäß der Modellierung in eine Standardgleichverteilung transformiert werden. Dies geschieht für die Aktienrenditen und die Zinsraten in unterschiedlicher Art und Weise.

Die Problematik bei der Transformation der Aktie ist die bedingte Varianz die durch das GARCH Modell gegeben ist. Es ist deshalb nicht ausreichend eine inverse Verteilungsfunktion auf die Daten anzuwenden um so eine Standardgleichverteilung zu erhalten. Stattdessen erfolgt die Transformation Schrittweise. Dazu wird die bedingte Volatilität für jeden Datenpunkt berechnet um anschließend die inverse t-Verteilung auf die jeweilige Beobachtung anzuwenden. Die Verteilung wird weiterhin um den Mittelwert zentriert, die Freiheitsgrade müssen für den eingeschränkten Datensatz geschätzt werden.

Die Ergebnisse lassen sich anhand des folgenden Histogramms darstellen. Man erkennt, dass die Verteilung sehr homogen ist, so dass von einer adäquaten Modellierung ausgegangen werden kann.

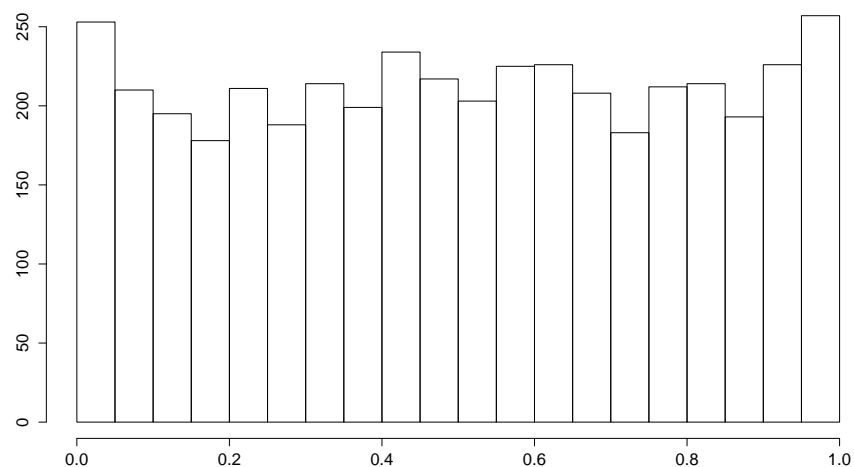


Abbildung 5: Histogramm der transformierten Aktienrenditen

Die Zinsen werden mit Hilfe des CIR Modells transformiert, das Vorgehen ist analog zur Simulation. Die Verteilungsfunktion der nicht-zentralen χ^2 Verteilung wird Schrittweise auf die Beobachtungen angewandt um eine Gleichverteilung zu erhalten. Der nicht-Zentralitäts Parameter λ wird dazu in jedem Schritt neu berechnet. Die Ergebnisse lassen sich auch an dieser Stelle anhand eines Histogramms nachvollziehen.

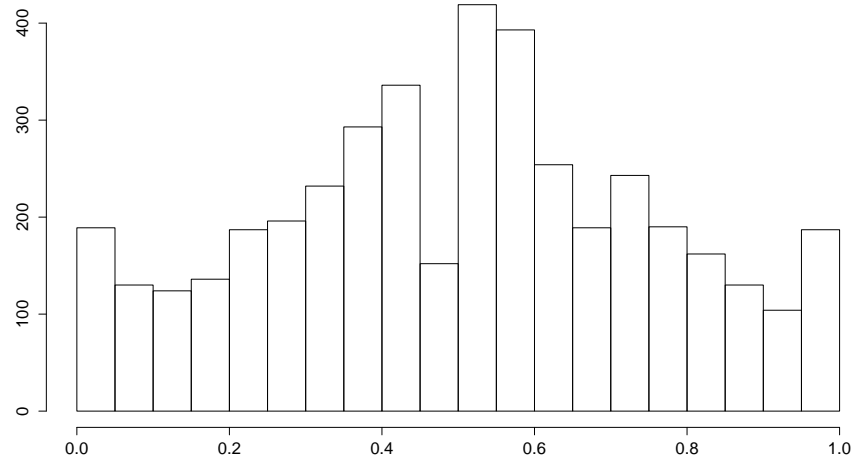


Abbildung 6: Histogramm der transformierten Zinsraten

Anders als in Abbildung 5 ist deutlich zu erkennen, dass die transformierten Daten nicht gleichverteilt sind. Dies liegt daran, dass das CIR Modell die Daten deutlich schlechter modelliert, als es das GARCH Modell für die Aktienrenditen tut. Die Gründe dafür werden ausführlich in Abschnitt 3.5 dargelegt. An dieser Stelle wird vorerst mit den transformierten Daten weitergearbeitet.

Mit Hilfe der beiden Gleichverteilungen kann nun die Copula geschätzt werden. Die Wahl fällt dabei aufgrund der Abhängigkeitsstruktur auf eine Gauß-Copula die durch den Korrelationskoeffizienten ρ bestimmt ist. Als geschätzten Wert erhält man $\rho = 0.0431$, dieser Wert deutet auf eine äußerst schwach ausgeprägte Abhängigkeit zwischen den täglichen Beobachtungen hin.

Die Modellierung der Abhängigkeit lässt sich auf verschiedene Arten realisieren. In der ersten, intuitiven Variante werden dazu aus der geschätzten Copula Paare von gleichverteilten, abhängigen Variablen gezogen. Aus diesen lassen sich die Fehlerterme für die Simulation der Aktie und des Zinses berechnen. Im Fall der Aktie müssen die gleichverteilten Fehler lediglich in eine Standardnormalverteilung transformiert werden. Diese fließen anschließend direkt über ε in das GARCH Modell ein. Die Transformation geschieht anhand der inversen Standardnormalverteilung.

Im CIR Modell wird dagegen die inverse nicht-zentrale χ^2 Verteilung erneut schrittweise auf die gleichverteilten Fehlerterme angewandt. Dabei muss wiederum in jedem Schritt der nicht-Zentralitäts Parameter λ berechnet werden. In dieser Variante hat die Simulation den gravierenden Nachteil, dass die inverse nicht-zentrale χ^2 -Verteilung für große λ äußerst rechenintensiv ist. Aufgrund des hohen Zeithorizontes, der in dieser Anwendung simuliert wird, stellt die beschriebene Variante lediglich eine theoretische Möglichkeit dar, die in der Praxis am hohen Rechenaufwand scheitert.

Zur Umgehung der hohen Rechenintensität, die aus der inversen nicht-zentralen χ^2 -Verteilung resultiert, wird eine andere Variante implementiert, die auch in Aas et al. (2009) ausführlicher erläutert wird. Dazu wird als Erstes die Zinsrate wie in Abschnitt 3.2 beschrieben simuliert. Die Zinsrate ist dadurch vorerst unabhängig von der Bewegung der Aktie. Die Zinsraten werden dann mit Hilfe der nicht-zentralen χ^2 -Verteilung transformiert, so dass eine Standardgleichverteilung entsteht. Für die Aktie werden ebenfalls Fehlerterme aus einer Standardgleichverteilung gezogen, die von den Zinsen unabhängig sind.

Um die Abhängigkeit zwischen den beiden gleichverteilten Fehlern herzustellen werden die Fehlerterme der Aktie mit Hilfe der Copula anhand der so genannten h-Funktion transformiert. Diese berechnet die benötigten, abhängigen Fehlerterme anhand der bedingten Randdichte aus den Zinsen.

Die allgemeine h-Funktion lässt sich wie folgt darstellen:

$$h(u_1, u_2, \theta) = F(u_1|u_2) = \frac{\partial C_{u_1 u_2} \{F(u_1), F(u_2)\}}{\partial F(u_2)} \quad (11)$$

In dieser Gleichung ist u_1 immer bedingt auf u_2 . Die geschätzten Parameter der jeweiligen Copula werden in θ wiedergegeben. Die inverse h-Funktion für die Gauß-Copula lautet:

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho) = \Phi\{\Phi^{-1}(u_1)\sqrt{1-\rho^2} + \rho \Phi^{-1}(u_2)\} \quad (12)$$

Mit Hilfe der inversen h-Funktion lassen sich nun anhand der geschätzten Copula und den transformierten Zinsraten abhängige, gleichverteilte Fehlerterme für die Simulation der Aktie berechnen. Die Abhängigkeitsstruktur entspricht auf diese Weise der geschätzten Copula.

Die resultierenden, gleichverteilten Fehlerterme müssen anschließend mit Hilfe einer inversen t-Verteilung transformiert werden. Der Mittelwert der Verteilung liegt aufgrund der Zentrierung bei 0, die Standardabweichung hat den Wert 1, für die Freiheitsgrade wird derselbe Wert wie bei der Transformation der Aktienrenditen in eine Gleichverteilung verwendet. Bevor die Fehlerterme in das GARCH Modell übergeben werden können, muss zudem berücksichtigt werden, dass für die Varianz der t-Verteilung der folgende Zusammenhang gilt.

$$Var(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (13)$$

Die Fehlerterme müssen aus diesem Grund mit der Wurzel aus (13) multipliziert werden und können anschließend im GARCH Modell verwendet werden.

Der Algorithmus kann wie folgt zusammengefasst werden:

Berechnung der Abhängigkeitsstruktur

1. Simuliere unabhängige Zinsraten anhand von $r_t | r_{t-1} \sim c \chi_d'^2(\lambda)$.
 2. Transformiere die Zinsraten in eine Gleichverteilung u_2
 3. Simuliere unabhängige Fehlerterme für die Aktienrenditen aus einer $U(0, 1)$ Verteilung
 4. Berechne die Abhängigkeitsstruktur anhand von $h^{-1}(u_1, u_2, \rho)$
 5. Transformiere u_1 mit der inversen t-Verteilung
 6. Multipliziere die Fehler mit $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}$
 7. Simuliere die Aktienrenditen anhand der t-verteilten Fehlerterme
-

3.4 Sterbetafel

Früher oder später endet jeder Lebensversicherungsvertrag, die natürliche Ursache dafür ist der Tod des Versicherungsnehmers. Um dieses Ereignis zu modellieren, sind Annahmen bezüglich des Todeszeitpunktes nötig. Da in dieser Arbeit lediglich jährliche Berechnungen stattfinden, genügen Wahrscheinlichkeiten für den Tod des Versicherungsnehmers auf jährlicher Basis. Diese Wahrscheinlichkeiten werden in den so genannten Sterbetafeln zusammengefasst.

Die Berechnung von zukünftigen Sterbewahrscheinlichkeiten ist ein komplexes Unterfangen. In der Modellierung spielen verschiedene Faktoren eine Rolle, allen voran müssen die Auswirkungen steigender Lebensqualität und besserer medizinischer Versorgung in der Prädiktion berücksichtigt werden. Da eine entsprechende Modellierung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird auf Sterbetafeln der Aktuarsvereinigungen zurückgegriffen. Dennoch sollen an dieser Stelle Nutzen und Anwendung der verfügbaren Sterbetafeln erläutert werden. Da der Aktienindex und der Zins auf US amerikanische Daten kalibriert wird, ist es folgerichtig sinnvoll, Sterbetafeln für die USA zu verwenden. Die amerikanische Aktuarsvereinigung „Society of Actuaries “ (SOA) stellt speziell für Variable Annuitäten Sterbetafeln zur Verfügung. Diese unterscheiden sich im Vergleich zu anderen Sterbetafeln darin, dass das Höchstalter bei 115 Jahren höher angesetzt ist, als in der konventionellen Lebensversicherung.

Die verwendete Sterbetafel enthält bedingte einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten q_x . Diese geben die Wahrscheinlichkeit q für einen x -jährigen an, innerhalb des nächsten Jahres zu sterben. Entsprechend ergibt sich die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -jährigen als $p_x = 1 - q_x$. Für die mehrjährige Überlebens- beziehungsweise Sterbewahrscheinlichkeit nimmt man das entsprechende Produkt.

Das theoretische Höchstalter ist mit 115 Jahren angegeben. Dies impliziert eine Sterbewahrscheinlichkeit von 1 für jemanden, der dieses Alter erreicht. Für die Anwendung in der Versicherung ist diese Annahme sinnvoll, da damit zu rechnen ist, dass der Großteil des Versicherungskollektivs dieses Alter nicht erreicht. Darüber hinaus erleichtert ein endlicher Zeithorizont die Berechnungen.

Der Verlauf der Sterbewahrscheinlichkeiten entspricht darüber hinaus den intuitiven Erwartungen. Die bedingte Sterbewahrscheinlichkeit steigt stetig mit dem Alter an. Somit schrumpft das Versicherungskollektiv im Laufe der Zeit erst langsam, über die Zeit jedoch schneller werdend bis das gesamte Kollektiv verstorben ist. Dabei wird davon ausgegangen, dass im Laufe der Zeit keine neuen Verträge dem Kollektiv zugefügt werden.

Es ist an dieser Stelle wichtig, die Bedeutung der Sterbetafel zu verstehen. Die Sterbewahrscheinlichkeiten sind lediglich Erwartungswerte für ein Kollektiv von Versicherungsnehmern. Durch das Gesetz der großen Zahlen nähern sich die Sterbewahrscheinlichkeiten im Kollektiv deshalb mit wachsender Zahl an Versicherungsnehmern denen der Sterbetafel an. Zahlungsströme lassen sich nicht für

den Einzelnen berechnen, sondern lediglich auf Kollektivebene. Die Zahlungsströme für das Individuum erfolgen in der Realität in voller Höhe und enden abrupt bei Tod. Es wird deshalb in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass ein Versicherungskollektiv mit ausreichender Größe vorliegt, so dass das Gesetz der großen Zahlen gilt.

Aus diesem Umstand lässt sich auch ein großes langfristiges Risiko für den Versicherer ableiten. Für den Fall, dass das Versicherungskollektiv eine im Erwartungswert höhere oder niedrigere Überlebenswahrscheinlichkeit aufweist, als durch die Sterbetafeln angenommen, sind die Berechnungen des Versicherers unzutreffend. Während eine niedrigere Überlebenswahrscheinlichkeit keine negativen Auswirkungen auf den Versicherer hat, sind die berechneten Reserven im adversen Fall zu niedrig. Für den Fall, dass die Sterbewahrscheinlichkeit im Kollektiv niedriger ist, als in der Sterbetafel angegeben, spricht man deshalb auch vom Langlebigkeitsrisiko. Der Einfluss dieses Risikos wird auch in Kapitel 5.1 erläutert.

3.5 Gütetests

In diesem Kapitel wurden bisher zahlreiche Annahmen bezüglich der notwendigen Variablen zur Berechnung einer Variablen Annuität getroffen. Um ein sinnvolles Risikomanagement zu betreiben, ist es notwendig die Güte dieser Annahmen zu überprüfen soweit dies möglich und sinnvoll ist. Vor allem bei der Modellierung der Zinsen und des Aktienindex bieten sich solche Gütetests an, da für diese statistische Verfahren angewandt wurden. Die Güte der Sterbetafel wird in dieser Arbeit nicht überprüft, da die Verfahren zur Berechnung einer Sterbetafel äußerst komplex sind.

Sowohl bei der Modellierung des Aktienindex als auch bei der Berechnung der Zinsen wurden Verteilungsannahmen getroffen, die es zu überprüfen gilt. Als Testverfahren bietet sich der Kolmogorov-Smirnov (KS) Test an, dieser vergleicht die empirische Verteilungsfunktion F_n einer Variable mit einer vorgegebenen Verteilungsfunktion F_0 . Die Testhypothesen beim KS Test lauten wie folgt:

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x)$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_0(x)$$

Die Teststatistik d_n berechnet den maximalen Abstand zwischen empirischer Verteilungsfunktion und der bekannten Verteilungsfunktion F_0 :

$$d_n = \|F_n - F_0\| = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad (14)$$

Ist der Abstand d_n hinreichend groß, kann die Nullhypothese abgelehnt werden. Die kritischen Werte müssen dazu anhand der jeweiligen Verteilungsannahmen berechnet werden.

Um die Teststatistik für den Aktienindex zu berechnen, müssen Pfade mittels des beschriebenen Modells berechnet werden. Für diese werden die Parameter der t-Verteilung per Maximum Likelihood geschätzt, anschließend kann die Teststatistik für jeden Pfad mit Hilfe von Formel 14 berechnet werden. Die Realisationen der Teststatistik folgen einer Verteilung für die wiederum die α Quantile als kritische Werte berechnet werden können. Um eine möglichst aussagekräftige Verteilung zur Bestimmung der kritischen Werte zu erhalten scheinen 1000 simulierte Pfade angebracht. Die Pfade haben wiederum eine Länge von 5000, dies entspricht etwa zehn Handelsjahren und genügt der Forderung, die simulierte Verteilung hinreichend genau abzubilden.

Die Quantile werden für Signifikanzniveaus von $\alpha \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$ berechnet. Für den Aktienindex ergeben sich folgende kritische Werte:

Signifikanzniveau	90%	95%	99%
Kritischer Wert	0.097566	0.131934	0.203759

Tabelle 5: Kritische Werte für die Verteilung des Aktienindex

Für die realen Daten des S&P 500 wird nun eine t-Verteilung mittels Maximum Likelihood geschätzt. Für die Teststatistik ergibt sich dann ein Wert von etwa $d_n = 0.0392$. Da dieser Wert deutlich unter den kritischen Werten der angegebenen Signifikanzniveaus liegt, kann die Nullhypothese beibehalten werden. Die Verteilungsannahme einer t-Verteilung ist deshalb für die Modellierung des Aktienindex angebracht.

Das Vorgehen für die Zinsen erfolgt ähnlich wie für den Aktienindex. Um die kritischen Werte der Teststatistik zu berechnen müssen jedoch die spezifischen Modellierungsannahmen berücksichtigt werden. Cox et al. (1985) zeigen, dass die Verteilung der Zinsen im CIR Modell für $\alpha, \mu > 0$ und $t \rightarrow \infty$ einer Gamma-Verteilung $\gamma(\nu, \omega)$ folgt. Die Werte für ν, ω ergeben sich aus den geschätzten Parametern des CIR Modell:

$$\nu = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$$

$$\omega = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}$$

Die Bestimmung der kritischen Werte für die Teststatistik erfolgt nun analog zum Aktienindex. Anhand des CIR Modells werden 1000 Pfade der Länge 5000 simuliert. Für jeden Pfad werden anschließend die Parameter des CIR Modells geschätzt. Da die Maximum Likelihood Methode sehr rechenintensiv ist, wird auf die KQ Methode zur Schätzung der Parameter zurückgegriffen, der dadurch entstehende leichte Bias wird im Hinterkopf behalten. Aus den geschätzten Parametern des CIR Modells lassen sich die Parameter der Gamma-Verteilung bestimmen, mit der sich wiederum die Verteilung der Teststatistik berechnen lässt. Die kritischen Werte ergeben sich dann wie folgt aus den Quantilen:

Signifikanzniveau	90%	95%	99%
Kritischer Wert	0.146547	0.175418	0.253492

Tabelle 6: Kritische Werte für die Verteilung der Zinsrate

Die Teststatistik lässt sich anhand der realen Daten der Federal Reserve bestimmen. Es ergibt sich ein Wert von etwa $d_n = 0.391856$. Dieser Wert überschreitet die kritischen Werte aller drei Signifikanzniveaus, so dass die Nullhypothese einer Gammaverteilung abgelehnt werden muss. Die Höhe der Teststatistik schließt auch einen Fehler durch den Bias aus der KQ Schätzung aus. Das Histogramm der historischen Zinsraten mit der geschätzten Gamma-Verteilung gibt Aufschluss über das Ergebnis des Tests:

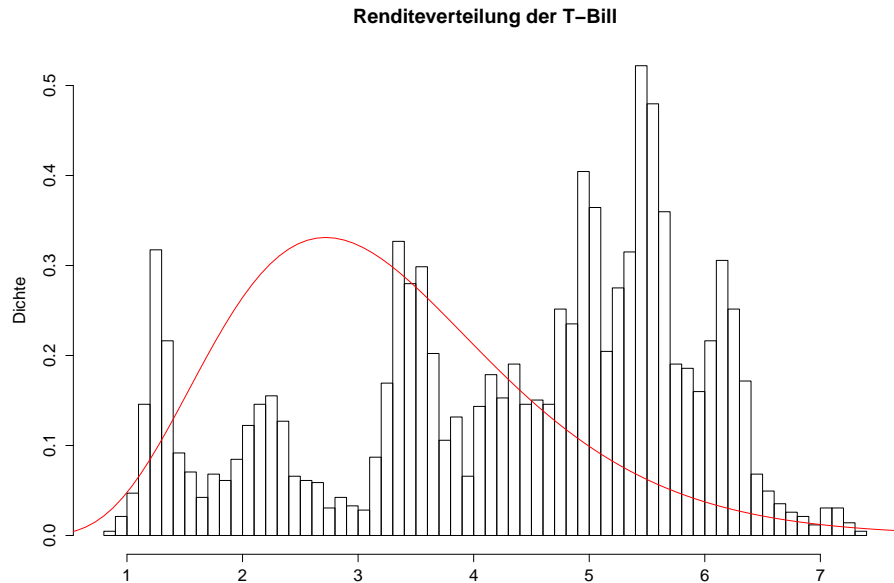


Abbildung 7: Histogramm der Rendite für die Treasury Bill von 1991 bis 2008 mit geschätzter Gammaverteilung

Die Gamma-Verteilung tut sich schwer damit, die heterogenen Ausprägungen der Zinsrate wiederzugeben. Am Hochpunkt der Verteilung liegt kaum Wahrscheinlichkeitsmasse, diese verteilt sich stattdessen auf der linken und vor allem auf der rechten Seite.

Das Histogramm deckt die Schwächen des CIR Modells auf. Bereits vor der Schätzung des Modells wurde der Datensatz auf ein homogeneres Niveau eingeschränkt als es beim unrestringierten Datensatz der Fall gewesen wäre. Jedoch liegt es in der Natur der Zinsrate, über einen längeren Zeitraum mehrere Niveaus anzunehmen. Dies kann durch das CIR Modell nicht adäquat abgebildet werden, da lediglich ein einziger Hochpunkt in der Verteilungsannahme vorhanden ist. Dagegen ist zu erwarten, dass das CIR Modell kurze Zeiträume, in denen der Zins lediglich um ein festes Niveau schwankt, angemessen modelliert.

Die Auswirkungen eines niedrigeren und höheren Mittelwertsparameters μ für das Risikomanagement werden schließlich in Kapitel 5.1 analysiert.

4 Modellierung

Nachdem bis hierhin die erforderlichen Grundlagen zur Berechnung von Variablen Annuitäten erörtert wurden, werden in diesem Abschnitt die Zahlungsströme für ein Kollektiv berechnet. Dazu sind vorab Annahmen bezüglich der Vertragsgestaltung und den Versicherungsnehmern zu tätigen.

Untersucht werden soll ein Vertrag mit einem Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit, sowie einem Guaranteed Minimum Death Benefit. Durch diese Garantien ist zum einen die Annuität und zum anderen das Guthaben bei vorzeitigem Ableben gegen ein schlecht laufendes Investment abgesichert. Aus Sicht des Versicherers verteilen sich so die Rückstellungen für die Garantien auf die gesamte Vertragslaufzeit. Der GMDB ist nur bei positivem Guthaben auszuzahlen, dagegen sind Auszahlungen aufgrund des GMWB erst ab einem Guthaben von null möglich.

Die Höhe der jährlichen Rente soll im betrachteten Vertrag bei 5% der jeweiligen Guthabenbasis betragen. Die Gebühren für den Versicherer liegen bei 2%, damit sollen sowohl die laufenden Kosten, als auch die Kosten für die Verwaltung des Fonds und die Deckung der Garantien abgedeckt werden.

Ein wesentlicher Faktor für die Gesamtrendite des Vertrags ist dessen tatsächliche Laufzeit. Würde man den Vertrag bereits bei Geburt abschließen, wäre das Guthaben nach wenigen Jahrzehnten aufgebraucht und die Rendite bestünde zum Großteil aus der ewigen Rente. Aus diesem Grund werden diese Art von Verträgen in der Praxis lediglich an Personen im Alter ab 55 Jahren verkauft.

Im vorliegenden Vertrag wird ein Sechzigjähriger betrachtet, der eine Prämie von 10000\$ zahlt und ab Vertragsbeginn eine Rente erhält. Durch die rechnerische Höchstgrenze von 115 Jahren wird der Vertrag für eine maximale Laufzeit von 55 Jahren berechnet.

Der Versicherungsnehmer ist als Teil eines großen, nicht näher bestimmten Kollektivs anzusehen. Damit kann bei der Berechnung der Rückstellungen mit Erwartungswerten für die Sterbewahrscheinlichkeit gerechnet werden. Andernfalls hinge die Höhe der Reserven eines Vertrages stark vom erreichten Alter des Versicherungsnehmers ab.

4.1 Analyse der Szenarien

Die Berechnung der Kennzahlen des Vertrags finden anhand der generierten Szenarien statt. Insgesamt werden 1000 Pfade für Aktien und Zinsen simuliert, aus denen sich unterschiedliche Zahlungsströme ergeben. Aus diesen lassen sich wiederum Barwerte beispielsweise für die Reserven, die Rendite des Versicherungsnehmers oder die eingenommen Gebühren berechnen.

Um einen Überblick über die Bandbreite der Szenarien zu erhalten werden diese eingehender studiert. Vor allem extreme Pfade sind von Interesse, da diese maßgeblichen Einfluss auf die Berechnung der Reserven in Abschnitt 4.4 haben.

Die Zinsen haben eine doppelte Funktion in dieser Arbeit. Sie dienen primär der Diskontierung zukünftiger Zahlungsströme, spielen jedoch auch eine Rolle bei der Bewertung der Garantien in Kapitel 6.4. In diesem Abschnitt wird lediglich der Einfluss auf die Barwerte betrachtet, da einzig dieser eine Rolle für das Risikomanagement spielt.

Die aktuelle Niedrigzinsphase führt zu wiederkehrenden Schlagzeilen über Lebensversicherer in der Bredouille. Aus diesen Meldungen lässt sich bereits erahnen, dass fallende Zinsen schlecht für Anbieter von Lebensversicherungen sind. Dies ist auch für Variable Annuitäten der Fall, tatsächlich liegen die Gründe jedoch an anderer Stelle, als bei der klassischen Lebensversicherung.

Das Grundprinzip klassischer Lebensversicherungen ist eine zugesicherte Rendite für eine Prämie, die vom Versicherer vereinnahmt wird. Dies bedeutet, dass anders als bei Variablen Annuitäten die Prämie der Versicherung gehört und diese am Kapitalmarkt eine Rendite erzielen muss. Jedoch sind hierzulande die Auflagen der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) für Lebensversicherungen so, dass ein sehr hoher Anteil des Geldes lediglich in sichere Finanzprodukte wie Staatsanleihen investiert werden darf. Deren Rendite hängt jedoch stark von den aktuellen Leitzinsen ab, so dass der Versicherer Probleme hat, die versprochene Rendite zu erzielen.

Dieses Problem existiert bei Variablen Annuitäten nicht, da das Investment zu großen Teilen aus einem Aktienportfolio besteht³. Für Aktien gilt tendenziell, dass niedrige Zinsen die Kurse aufgrund niedrigerer Kapitalkosten erhöhen. Somit liegen die Probleme für den Versicherer in der Diskontierung zukünftiger Zahlungsströme.

Um die Problematik zu verstehen ist es sinnvoll, einen kurzen Blick auf die

³In dieser Arbeit besteht das Investment nur aus Aktien

Abfolge der Zahlungsströme zu werfen, diese ist für einen beispielhaften Pfad in folgender Grafik dargestellt. Eine detaillierte Übersicht aller Zahlungsströme des entsprechenden Pfades befindet sich darüber hinaus in Appendix A.

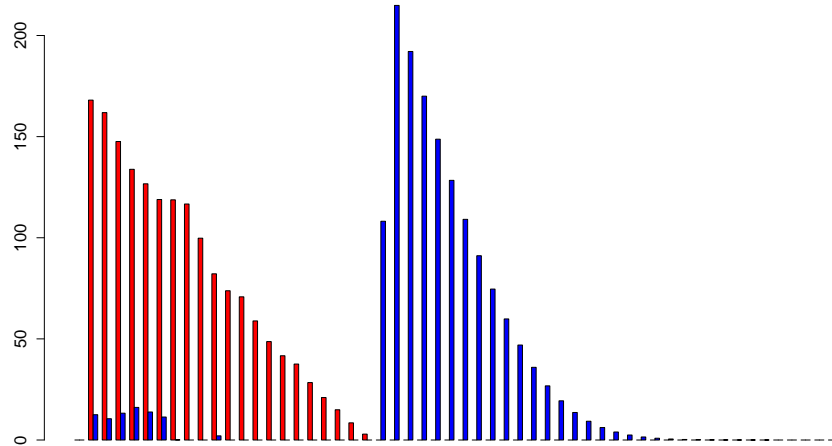


Abbildung 8: Übersicht über die zeitliche Abfolge der Zahlungsströme für einen beispielhaften Pfad

Man erkennt, dass die Einnahmen des Versicherers, die in der Grafik in rot eingezeichnet sind, in Form der Gebühren in den Anfangsjahren des Vertrags realisiert werden. Die Gebühren fallen proportional zum Guthaben und gehen mit fortschreitender Vertragsdauer gegen Null. Dagegen liegt ein Großteil der Auszahlungen oder auch Claims, die in der Abbildung blau dargestellt sind, in den späteren Vertragsjahren, sobald das Guthaben den Wert Null erreicht.

Da die Auszahlungen nicht in jeder Periode durch Gebühren gedeckt werden können, ist es notwendig, Rückstellungen für zukünftige Garantien aufzustellen. Der Barwert der Reserven hängt jedoch von den Zinsen ab. Fallen diese, sind zukünftige Zahlungen mehr Wert, so dass die Rückstellungen bei fallenden Zinsen steigen et vice versa.

Die Kosten dafür sind umso höher, da Geld, das als Reserve zurückgestellt wird, nicht weiter verwendet werden kann, insbesondere darf es nicht am Kapitalmarkt angelegt werden. Somit ist das Zinsrisiko für Lebensversicherer auch bei Variablen Annuitäten groß.

Die simulierten Zinspfade in dieser Arbeit lassen sich anhand folgender Tabelle deskriptiv beschreiben.

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
Einzelwerte	0.370	2.334	3.075	3.205	3.927	10.180
Mittelwerte	1.740	2.831	3.160	3.205	3.560	5.462

Tabelle 7: Deskriptive Beschreibung der simulierten Zinsen

Die Angaben in Tabelle 7 sind in Prozentpunkten. Es sind sowohl die Einzelwerte aller Jahre unabhängig von den Pfaden angegeben, sowie die Deskriptive Statistik aller Pfade. Der mittlere Zinssatz liegt in der Simulation wenig überraschend nahe dem geschätzten Mittelwertparameter μ aus dem CIR Modell.

Der Pfad mit den im Mittelwert niedrigsten Zinsen hat somit eine durchschnittliche jährliche Zinsrate von etwa 1.7%. Obwohl in einzelnen Jahren durchaus hohe oder tiefe Ausreißer vorkommen, bewegt sich ein Großteil der Zinspfade um ein mittleres Niveau um die 3%.

Zweifelsohne gibt es genug historische Belege, die sowohl deutlich höhere, als auch niedrigere Zinsen rechtfertigen. In den Achtziger Jahren kam es beispielsweise zu Zinsraten von über 15% auf einjährige amerikanische Staatsanleihen, wiederum befinden wir uns aktuell in einer ausgeprägten Niedrigzinsphase, in der die Zinsrate konstant unter einem Prozentpunkt verharret.

Während Ökonomen sich einig sind, dass die Exzesse aus den Achtziger Jahren so schnell nicht wieder vorkommen, ist es schwierig vorherzusehen, wie sich die Zinsstruktur tatsächlich über die kommenden Jahrzehnte entwickeln wird. Die Auswirkungen anhaltend niedriger Zinsen werden deshalb in Kapitel 5.1 genauer untersucht.

Das Investment in dieser Arbeit besteht vollständig aus dem simulierten Aktienindex. In der Praxis wird oft eine Mischform mit Aktien und Anleihen als Investment gewählt, um die Volatilität der Renditen gering zu halten. Anders als beim Zinssatz ist bei der Modellierung der Aktienrendite kein zeitlich variierendes Niveau zu berücksichtigen. Entsprechend decken sich die Ausprägungen der simulierten Pfade auch mit den Erwartungen aus der Entwicklung der letzten Jahrzehnte.

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
Einzelwerte	-28.83	2.99	7.42	7.66	12.06	52.63
Mittelwerte	4.46	7.01	7.67	7.66	8.32	10.59
Standardabweichung	4.60	6.40	6.88	6.91	7.39	9.59

Tabelle 8: Deskriptive Beschreibung der simulierten Aktienrendite

Tabelle 8 ähnelt dem Aufbau aus Tabelle 7, die Angaben sind ebenfalls in Prozentpunkten, neu ist lediglich die Zeile für die Ausprägung der Standardabweichung der einzelnen Pfade.

Die Renditen einzelner Jahre entspricht sowohl vom Mittelwert, als auch vom höchsten unteren Ausreißer den historischen Renditen. Renditen von über 40% kamen zwar seit den fünfziger Jahren für den S&P 500 nicht mehr vor, jedoch handelt es sich dabei in den simulierten Renditen um seltene Ausreißer, die insgesamt elf mal in den 5600 Jahresrenditen vorkommen.

In den folgenden Kapiteln wird noch deutlich, dass nicht nur die absolute Rendite, sondern auch deren Volatilität für die Berechnung der Zahlungsströme eine große Rolle spielt. Besonders Pfade mit einer hohen Volatilität führen zu hohen benötigten Rückstellungen, so dass auf diesen ein besonderes Augenmerk liegt.

Schließlich sei auch noch ein Blick auf die Gesamtheit der simulierten Aktienpfade geworfen. Der folgende Plot bildet die Aktienkurse für den gesamten Zeitraum des Vertrags ab, es wird von einem Anfangskurs von 1 ausgegangen. Der Mittelwert der Kurse ist in rot abgebildet, zudem ist der theoretische Kurs für den S&P 500 eingezeichnet, wenn man davon ausgeht, dass die tägliche Rendite dem Mittelwert der realen Daten entspricht.

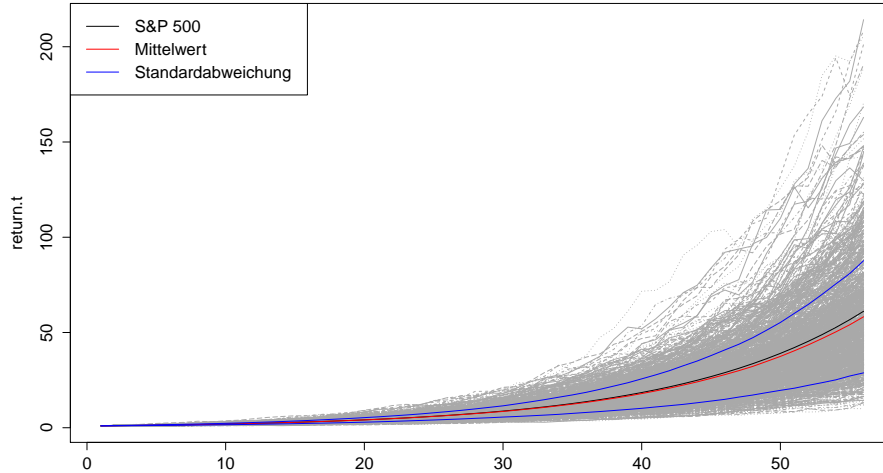


Abbildung 9: Überblick über die simulierten Aktienkurse

Man erkennt, dass die realen Daten einen marginal höheren Erwartungswert haben im Vergleich zu den simulierten Pfaden. Dies spiegelt sich auch im Erwartungswert der täglichen Rendite wider, diese liegt mit 0.02992% für den S&P 500 höher als in der Simulation mit einem Wert von 0.02969%. Insgesamt decken die Pfade ein breites Spektrum ab, investiert man in $t = 0$ einen Dollar in den Index, liegt die Bandbreite des Vermögens nach 55 Jahren zwischen etwa 12 \$ und 238\$.

Zu beachten ist, dass die Volatilität der Renditen im Gegensatz zur Volatilität der Kurse konstant ist. Die Bandbreite der Standardabweichung in Abbildung 9 steigt lediglich aufgrund des Zinseszins Effekts.

Zwar wurde bisher die Gesamtlänge der simulierten Aktienpfade untersucht, von Interesse sind in dieser Anwendung jedoch lediglich die ersten Jahrzehnte, da nach spätestens 31 Jahren in allen Pfaden das Guthaben aufgebraucht ist. Die grundlegenden Ergebnisse ändern sich aber nicht.

4.2 Zahlungsströme

Aufgrund der Komplexität der Garantien sind die entstehenden Zahlungsströme in jeder Periode äußerst unübersichtlich. Deshalb wird in diesem Abschnitt detailliert dargestellt, wie die einzelnen Berechnungsschritte in dieser Arbeit ab-

laufen. Die Reihenfolge der Berechnungen kann abhängig von den Vertragskonditionen variieren, die beschriebenen Schritte können deshalb in der Praxis abweichen.

1. Bestimmung des Guthaben zu Periodenbeginn

Das Guthaben zu Vertragsbeginn oder auch Account Value, ist die gezahlte Prämie des Versicherungsnehmers. Dem Guthaben fließen alle getätigten Zahlungsströme zu. Das Guthaben zu Periodenbeginn ergibt sich immer aus dem Guthaben am Ende der letzten Periode.

2. Berechnung der Rente

Die ausgezahlte Rente, beziehungsweise Annuität, ergibt sich theoretisch immer als Prozentsatz des aktuellen Guthabens. Da jedoch die Rente im Gegensatz zum aktuellen Guthaben nicht gegenüber der Vorperiode fallen kann, ist eine separate Guthabenbasis zu führen, die dies berücksichtigt. Diese wird unter Punkt 4 erläutert. Die Höhe der Rente berechnet sich folglich als prozentualer Anteil der Guthabenbasis für die Annuität. Falls das tatsächliche Guthaben abzüglich der berechneten Rentenzahlung größer null ist, wird die Rente dem Guthaben anschließend abgezogen.

3. Bestimmung des Guthaben zu Periodenende

Im nächsten Schritt wird die Rendite aus dem Investment berechnet und dem Guthaben hinzugefügt. Anschließend werden die Gebühren als prozentualer Anteil des Guthabens berechnet und diesem abgezogen. Der entstehende Wert ist das tatsächliche Guthaben zum Periodenende.

4. Berechnung der Basis für die Annuität

Aufgrund der Garantie für die Annuität ist es notwendig diese in jeder Periode zu berechnen. Die Rente wird als prozentualer Teil des Guthabens ausgezahlt, kann jedoch nicht fallen. Dies macht es notwendig, ein imaginäres Guthaben zur Berechnung der Annuität zu führen. Im Weiteren wird dieses Guthaben als Balance bezeichnet.

Zur Berechnung der Balance wird das Guthaben zu Periodenende abzüglich der Annuität mit der Balance der Vorperiode verglichen. Die neue Balance ergibt sich aus dem Maximum der beiden Werte. Liegt der Wert der berechneten Balance plus der Annuität über der Balance der Vorperiode, erfolgt eine Erhöhung der Rente. Der Überschuss oder auch Ratchet jeder Periode wird der so genannten Basis hinzugefügt. Die Basis wiederum

ergibt sich aus der ursprünglichen Prämie zuzüglich aller bisherigen Ratchets. Die Rente kann nun als prozentualer Anteil der Basis berechnet werden.

5. Berechnung der Basis für den Todesfall

Das Guthaben ist für den Fall des vorzeitigen Ablebens des Versicherungsnehmer im Vertrag dieser Arbeit ebenfalls durch eine Garantie abgesichert. Diese schützt das Guthaben vor Verwerfungen am Aktienmarkt. Die Berechnung gestaltet sich weniger aufwendig im Vergleich zur Annuität.

Die Basis im Todesfall ergibt sich zu Vertragsbeginn aus der gezahlten Prämie. Am Ende jeder Periode wird der Basis die ausgezahlte Rente abgezogen. Im Todesfall wird dann die aktuelle Basis den Hinterbliebenen ausgezahlt. Liegen keine Rentenerhöhungen vor, ergibt sich somit eine linear fallende Basis.

Es ist zu beachten, dass die Basis auf Null sinkt, sobald das Guthaben den Wert null erreicht. Üblicherweise fällt die Basis damit an einem bestimmten Zeitpunkt rapide ab.

4.3 Berechnung der Rendite

Der zentrale Gedanke der Lebensversicherung ist die Absicherung der Hinterbliebenen im Todesfall, sowie die Erzielung einer Rendite. Vor allem die Berechnung der Erträge ist für Variable Annuitäten aufgrund der Vielzahl an Zahlungsströmen und der Garantien unübersichtlich. In diesem Abschnitt wird deshalb zum einen die Rendite aus Sicht des Versicherungsnehmers berechnet und zum anderen die Profitabilität für den Versicherer. Dazu werden verschiedene Szenarien analysiert, aus denen die Zahlungsströme berechnet werden können. Da sich die Rendite des Versicherers aus den Auszahlungen an den Versicherten ergibt, wird in dieser Reihenfolge vorgegangen.

Die Rendite des Versicherungsnehmers hängt für den untersuchten Vertrag von zwei Faktoren ab. Zum einen ist der Todeszeitpunkt entscheidend für die Gesamtdauer der ausbezahlten Rente, zum anderen bestimmt die Performance des Investments die Höhe der Auszahlungen. Da der Zeitpunkt des Todes zufällig ist, wird mit Erwartungswerten gerechnet, wie sie auch in der Sterbetafel gegeben sind.

Bei den Szenarien kann prinzipiell zwischen vier verschiedenen Fällen unterschieden werden. Das Investment kann über- oder unterdurchschnittlich abschneiden oder moderat verlaufen. Zudem ist zu untersuchen, wie sich eine hohe Volatilität der jährlichen Renditen im Aktienindex im Vergleich zu einer moderaten Entwicklung auswirkt. Der letzte Fall ist aufgrund der Rentengarantie besonders interessant, da er intuitiv schwer einzuschätzen ist. Zuerst wird das Vorgehen für den Fall einer moderaten Entwicklung des Aktienindex beschrieben um anschließend die Berechnungen auf die anderen Fälle zu erweitern.

Die Zahlungsströme an den Versicherten sind insgesamt zweigeteilt. Zum einen wird monatlich eine Rente gezahlt, deren Höhe vom Investment abhängt. Zweitens erfolgt im Todesfall die Auszahlung des Restbetrags, der durch die GMDB Garantie geschützt ist.

Allen Zahlungsströmen kann in jeder Periode eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet werden, so dass sich die erwartete Auszahlung in jeder Periode als die Summe der beiden Komponenten ergibt. Diskontiert man diesen Wert für jede Periode entsprechend ab, ergibt sich die erwartete Gesamtrendite des Vertrags als Summe der gesamten, diskontierten Auszahlungen über alle Perioden.

Für die 1000 simulierten Pfade ergibt sich eine erwartete, diskontierte Auszahlung von 21430 \$ bei einer ursprünglichen Prämie von 10000\$. Die Bandbreite der erwarteten Auszahlung reicht von 13560\$ bis zu 32360\$.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
13560	19480	21190	21430	23100	32360

Tabelle 9: Deskriptive Beschreibung der erwarteten Auszahlung aus Sicht des Versicherungsnehmers

Interessant ist darüber hinaus, dass höhere Aktienrenditen nicht automatisch zu höheren Auszahlungen führen, vielmehr spielt die Standardabweichung der Aktienrendite eine wichtige Rolle. Dies zeigt auch der folgende dreidimensionale Plot, der alle drei Variablen miteinander vergleicht.

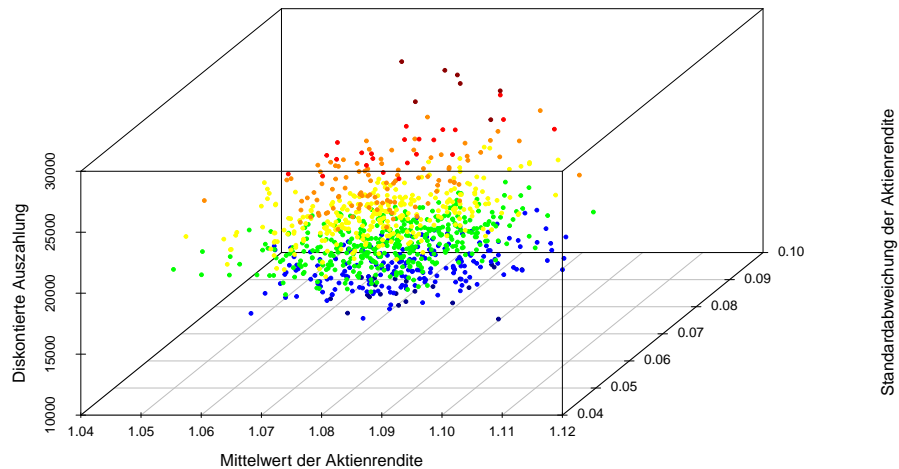


Abbildung 10: Erwartete, diskontierte Auszahlungen aus Sicht des Versicherungsnehmers

Die Auszahlungen sind farblich nach der Höhe abgebildet, die niedrigsten Werte sind in blau, die höchsten in rot dargestellt. Man erkennt, dass niedrige Ergebnisse bei allen Niveaus der mittleren Aktienrendite eines Pfades auftreten. Hingegen kann ein leicht positiver Zusammenhang zwischen Standardabweichung der Aktienrendite und der Höhe der Auszahlung nachgewiesen werden. Somit ist Volatilität in diesem Investment aus Sicht des Anlegers eine wünschenswerte Eigenschaft.

Stutzig macht hingegen auf den zweiten Blick die Höhe der Rendite. Ein mittlerer Barwert von knapp über 21000\$ klingt für einen Zeithorizont von 55 Jahren nach einem schlechten Geschäft. Dies erscheint umso drastischer wenn man 10000\$ für 55 Jahre in den Aktienindex investiert und den resultierenden Barwert mit diesen Ergebnissen vergleicht.

Jedoch gilt es mehrere Faktoren zu berücksichtigen. Der Zins zur Diskontierung beträgt im Durchschnitt etwa 3 %. Die Barwerte bedeuten, dass selbst im schlimmsten Fall eine durchschnittliche Rendite von über 3 % pro Jahr erzielt wurde. Angesichts der aktuellen Entwicklungen auf den Finanzmärkten klingt dies hervorragend, diese wurden jedoch in der Modellierung explizit nicht berücksichtigt.

Der niedrige Barwert resultiert vielmehr aus der Annuität. Diese vereinnahmt einen Großteil der jährlichen Zinserträge, so dass kein Zinseszins Effekt vorliegt. Die Rente wird nicht weiter angelegt, sondern konsumiert. Variable Annuitäten sind somit kein Produkt um Vermögen aufzubauen, vielmehr dienen sie dazu bestehendes Vermögen zu erhalten und einen sicheren Konsum bis zum Lebensende zu gewährleisten.

Die Einnahmen des Versicherers sind die Gebühren, die wiederum direkt vom Guthaben jeder Periode abhängen. Sinkt dieses auf Null, versiegen gleichzeitig die Einnahmen. Aus der diskontierten Summe aller Gebühren lässt sich ein Barwert bestimmen, der die Einnahmeseite des Versicherers bestimmt. Dabei sind ausschließlich die Gebühren aus dem aktuellen Bestand jeder Periode zu berücksichtigen, so dass die Sterbetafel auch an dieser Stelle benötigt wird.

Demgegenüber stehen die bereits beschriebenen Zahlungsverpflichtungen an den Versicherungsnehmer. Die Rendite des Versicherers ergibt sich aus der Differenz der beiden Werte. Die realisierte Rendite ist schließlich von der Entwicklung des Aktienmarktes und dem Todeszeitpunkt des Versicherungsnehmers abhängig.

Ein kritischer Punkt ist die Periode in der das Guthaben auf Null sinkt. Bis zu dieser Periode konnte der Versicherer Gebühren einnehmen und die Rente wurde aus dem Guthaben gedeckt. Ab diesem Zeitpunkt muss der Versicherer für die Rente aufkommen. Stirbt der Versicherungsnehmer folglich in einer nahen Periode sind die Gewinne des Versicherers besonders hoch. Lebt der Versicherte hingegen überdurchschnittlich lange, ist mit einer geringen Rendite oder sogar Verlusten zu rechnen. Dies trifft umso mehr zu, je höher die garantierte Rente durch die Entwicklung des Aktienmarktes ist. In der Simulation liegt der Erwartungswert für den betrachteten Vertrag bei etwa 1247 \$. In wenigen Fällen ist auch eine negative Rendite möglich. Ein Boxplot der Renditen verdeutlicht die Bandbreite der Gewinnspanne.

Schließlich kann die Gewinnspanne auch für den Versicherer in Abhängigkeit von der Rendite und der Standardabweichung des Investments grafisch dargestellt werden. Während ein klarer positiver Zusammenhang zwischen Aktienrendite und Gewinn vorliegt, ist der Einfluss der Standardabweichung auf den Gewinn uneindeutig.

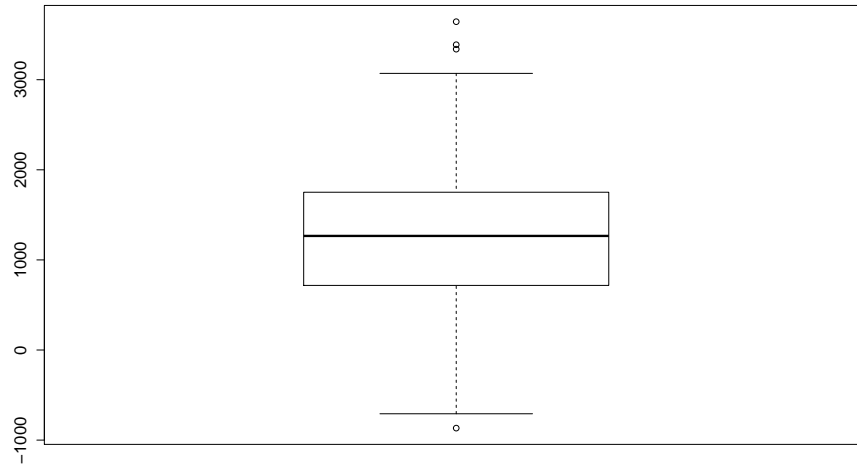


Abbildung 11: Erwartete, diskontierte Einnahmen des Versicherers

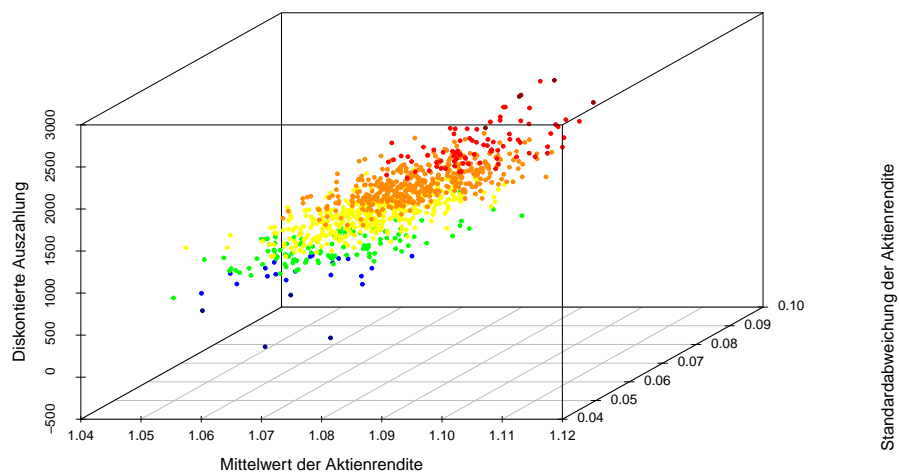


Abbildung 12: Erwarteter, diskontierter Gewinn aus Sicht des Versicherers

Diese Zahlen deuten auf den ersten Blick auf ein gutes Geschäft für den Versicherer hin. Doch auch dieser Schein trügt, denn bis hierhin wurden die anfallenden Kosten nicht berücksichtigt. Zu diesen zählen die Personalkosten, Vertriebskosten, administrative Kosten sowie Aufwendungen für das Investment wie beispielsweise Fondsgebühren.

Versicherer weisen deshalb keinen pauschalen Prozentsatz zur Kostendeckung aus, sondern verlangen für jeden Einzelposten einen kleinen Anteil, die wiederum in der Summe dem Prozentsatz der Gebühren in dieser Arbeit entsprechen. Es ist deshalb davon auszugehen, dass die Gewinnspanne deutlich kleiner ausfällt und der erwartete Gewinn unter Berücksichtigung der Fixkosten geringer ist als im dargestellten Plot.

4.4 Berechnung der Reserven

Die Berechnung der Reserven erfolgt anhand derselben Zahlungsströme wie bereits in den vorherigen Abschnitten. Dennoch spielen in diesem Kapitel Überlegungen, die vor allem die Solvenz des Versicherers betreffen eine Rolle.

Sinn und Zweck der Reserven ist es, die Bedienung von Zahlungsverpflichtungen auch unter adversen Entwicklungen zu Gewährleisten. Dazu werden die Zahlungsströme eines Vertrags über die Simulation berechnet und die schlechtesten Ergebnisse zur Berechnung der Reserven verwendet. Damit ist gewährleistet, dass der Versicherer auch unter erschwerten Bedingungen seinen Zahlungsverpflichtungen nachkommen kann.

Unter Solvency II ergeben sich die einjährigen Reserven im Standardmodell anhand des Value at Risk (VaR) Wert des 99,5% Quantils. Der VaR einer Variable X mit Verteilungsfunktion F_X und Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ berechnet sich anhand folgender Formel:

$$VaR_\alpha = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x | F_X(x) \geq \alpha\} \quad (15)$$

Somit bestimmen die schlechtesten 0,05% der simulierten Pfade die Höhe der Reserven, für die 1000 Pfade dieser Arbeit sind somit die fünf mit den höchsten Auszahlungen relevant. Dieser Ansatz ist nicht frei von Kritik, diese wird in dieser Arbeit jedoch nicht diskutiert.

Die Ergebnisse lassen sich am besten anhand des folgenden Plots darstellen. Darin sind die benötigten einjährigen Reserven nach Solvency II in blau dar-

gestellt, die erwarteten Zahlungsverpflichtungen sind in schwarz abgebildet, der Höhenunterschied markiert den benötigten Risikopuffer. Die Einnahmeseite ist in der Grafik in rot dargestellt.

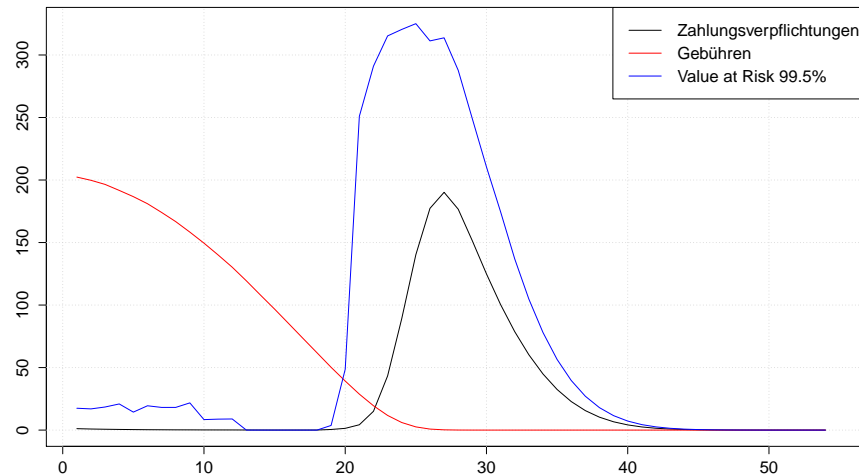


Abbildung 13: Reserven unter Solvency II

Der Plot spiegelt die zeitliche Struktur der Zahlungsströme wider. Die Reserven in den ersten fünfzehn Jahren ergeben sich aufgrund der Garantierten Auszahlung im Todesfall (GMDB). Diese sind relativ niedrig, da auch die Sterbewahrscheinlichkeiten in den Anfangsjahren gering sind. Wenn diese Wahrscheinlichkeiten in späteren Jahren steigen ist in der Regel das Guthaben aufgebraucht, so dass keine Reserven für den GMDB notwendig sind.

Mit dem Aufbrauchen des Guthabens setzt dagegen die Garantie der Rentenzahlungen (GMWB) ein, dies geschieht etwa ab dem zwanzigsten Vertragsjahr. An dieser Stelle steigen die Zahlungsverpflichtungen, sowie die Reserven sprunghaft an. Ab dem dreißigsten Vertragsjahr sinken diese Werte schließlich aufgrund erneut sinkender Sterbewahrscheinlichkeiten.

Für einen blauäugigen Versicherer endet die Berechnung der Reserven an dieser Stelle, da die Höhe der benötigten Rückstellungen bekannt ist. Diese können jährlich in der Bilanz angegeben werden, so dass lediglich in jeder Periode das nötige Geld aufgebracht werden muss.

Problematisch ist an diesem Ansatz nicht die Höhe der benötigten Reserven - diese können ohne weiteres aus den Gebühreneinnahmen gedeckt werden - sondern die zeitliche Abfolge. In der Bilanz wird der Versicherer aufgrund dieses Vertrages hohe Gewinne in den ersten zwei Jahrzehnten ausweisen, auf die jedoch in den folgenden zwanzig Jahren hohe Verluste folgen. Werden die Gebühren direkt nach Eingang durch den Versicherer vereinnahmt müssen die Reserven zur Vertragsmitte aus dem Eigenkapital gedeckt werden. Eben dies gilt es jedoch durch einen Reservepuffer zu verhindern.

An dieser Stelle wird zwischen den Begriffen Reserven und Rücklagen eine klare Unterscheidung getroffen, bisher wurden beide in dieser Arbeit als Synonym verwendet. Mit den Reserven ist jetzt immer der einjährige Value at Risk gemeint, der zur Deckung der Zahlungsverpflichtungen einer Periode benötigt wird. Die Rücklagen bezeichnen hingegen den Vermögensbarwert des Versicherers in einer bestimmten Periode.

Es ist eine wünschenswerte Eigenschaft eines Vertrages, dass die benötigten Reserven aus den Einnahmen des Versicherers gedeckt werden können und nicht durch Eigenkapital finanziert werden müssen. Weiterhin soll ein bestimmter Risikopuffer vorliegen, so dass es in keiner Periode zu Defiziten aufgrund mangelnder Reserven kommt. Schließlich möchte der Versicherer aber auch einen möglichst hohen Anteil der Einnahmen zu einem frühestmöglichen Zeitpunkt vereinnahmen.

Aus diesen drei Eigenschaften lässt sich die notwendige Höhe der Rückstellungen direkt ableiten. Um die Zahlungsverpflichtungen zu decken, muss der Barwert des Vermögens mindestens dem Zeitwert der Auszahlungen entsprechen. Als Risikopuffer wird auch an dieser Stelle der Value at Risk für ein Niveau von 99.5% jeder Periode berechnet. Der Barwert ergibt sich als abdiskontierte Summe aller berechneten Werte des Value at Risk.

Um die notwendigen Rücklagen zu bilden werden die Gebühren, die nicht zur Bildung der Reserven oder zur Deckung der Rückstellungen benötigt werden am Kapitalmarkt angelegt. Da der Versicherer ein hohes Interesse an Sicherheit hegt, wird als erzielte Rendite lediglich der Marktzins unterstellt, der auch zur Berechnung aller Barwerte verwendet wird.

Um schließlich einen möglichst hohen Teil der Gebühren frühzeitig zu vereinnahmen werden in jeder Periode sämtliche Gelder, die über den Barwert aller zukünftigen Zahlungsverpflichtungen hinausgehen als eine Art Dividende vereinnahmt. Sämtliche Werte werden in der folgenden Grafik veranschaulicht.

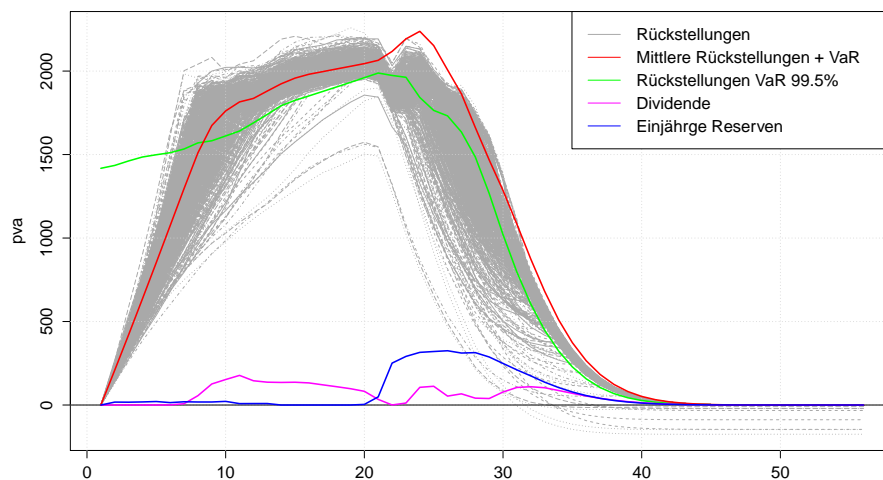


Abbildung 14: Übersicht über die Rückstellungen eines Vertrags

Man erkennt, dass in den ersten Jahren die Gebühreneinnahmen eisern gespart werden. Die Rückstellungen, die bei Null beginnen, erreichen nach acht Jahren das benötigte Niveau um alle zukünftigen Reserven gemäß einem Value at Risk von 99.5% zu bedienen. Somit erfolgen die ersten Dividenden nach acht Jahren. Die mittleren Rückstellungen zuzüglich der Reserven fallen wie gefordert ab diesem Zeitpunkt nicht mehr unter das berechnete Niveau. Die benötigten, jährlichen Reserven sind hier in blau dargestellt und entsprechen den Werten in Abbildung 13.

Es fällt auf, dass insgesamt acht Pfade zu Vertragsende negative Rückstellungen aufweisen, so dass Zuzahlungen aus dem Eigenkapital notwendig sind. Gemäß dem Value at Risk für ein Niveau von 99.5% dürften jedoch maximal vier Pfade einen Wert unter Null erreichen. Die Diskrepanz ergibt sich dadurch, dass die einjährigen Reserven nicht verzinst werden, so dass die Dividenden insgesamt ein wenig zu hoch ausfallen. Eine entsprechende Anpassung ist rechnerisch umständlich und trägt nicht zu neuen Erkenntnissen bei, so dass in dieser Arbeit darauf verzichtet wird.

Fasst man die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen wird nun zwischen Rückstellungen und Reserven unterschieden. Die Reserven dienen der Deckung aller Zahlungsverpflichtungen innerhalb eines Jahres, die Höhe ergibt sich jeweils aus Abbildung 13. Dagegen sind die Rückstellungen ein Maß für das Vermögen des Versicherers, das für den Ausgleich von Gewinnen und Verlusten gebildet wird. Die Höhe in jeder Periode kann Abbildung 14 entnommen werden.

5 Risikomanagement

In Kapitel 4 wurden für einen Mustervertrag die Zahlungsströme anhand von simulierten Daten berechnet. Das Ergebnis war aus Sicht des Versicherers zum einen ein Barwert der eingenommenen Gebühren und der Zahlungsverpflichtungen und zum anderen ein Überblick über die notwendigen Reserven.

In diesem Kapitel wird die Robustheit der Ergebnisse überprüft. Im Risikomanagement unterscheidet man dazu zwischen verschiedenen Risikoarten. Allen gemein ist, dass aus bestimmten Gründen die Reserven unterschätzt werden. Tritt dieser Fall ein, müssen die Zahlungsverpflichtungen aus dem Eigenkapital des Versicherers bedient werden, ist dieses aufgezehrt führt dies im schlimmsten Fall zur Insolvenz.

Generell lässt sich zwischen systematischen und unsystematischen Risiken unterscheiden. Ersteres Risiko gilt immer für das gesamte Kollektiv, während das unsystematische Risiko lediglich einzelne Verträge betrifft. Die Zahlungsströme jedes Vertrages hängen in dieser Arbeit von drei Variablen ab: Dem Aktienindex, den Zinsen und der Sterbetafel.

Das unsystematische Risiko tritt lediglich bei den Sterbewahrscheinlichkeiten auf, da der Todeszeitpunkt für jeden Menschen eine andere Ausprägung annimmt. Dieser Effekt kann dazu führen, dass einzelne Verträge aufgrund eines überdurchschnittlich erreichten Alters zu Verlusten für den Versicherer führen. Dieser Effekt wird jedoch durch das Kollektiv ausgeglichen, bei einer großen Anzahl an Verträgen ist zu erwarten, dass die Todeszeitpunkte den Wahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel entsprechen.

Das systematische Risiko ist deutlich ausgeprägter, da es bei allen drei Variablen auftritt und immer das gesamte Kollektiv betroffen ist. Aus diesem Grund ist eine sorgfältige Prüfung der Risiken notwendig, da Änderungen in einer der drei Variablen bereits zu hohen Verlusten führen können. In Kapitel 4 wurde angedeutet, wie die Zahlungsströme vom Aktienindex, den Zinsen und der Sterbetafel abhängen. In diesem Kapitel werden Ursachen für mögliche Änderungen in den drei Parametern identifiziert und die Auswirkung auf die Reserven untersucht.

5.1 Modellrisiko

Unter dem Modellrisiko versteht man gemeinhin, dass die Annahmen, wie sie bei der Modellierung in den Kapiteln 3 und 4 getroffen wurden in der Realität unzutreffend sind. Ziel ist die Auswirkungen möglicher Fehlerquellen auf die Reserven bei der Modellierung des Aktienindex, den Zinsen und der Sterbetafel abzuschätzen.

Unter das Modellrisiko fällt vor allem das Prognoserisiko, bei diesem besteht die Möglichkeit, dass Zusammenhänge in der Vergangenheit keinen oder einen eingeschränkten Einfluss auf die Zukunft haben. Ein aktuelles Beispiel dafür ist die anhaltende Niedrigzinsphase, die vor 2008 im Datensatz so nicht vorkommt und bei der Kalibrierung des Zinsmodells somit keine Berücksichtigung gefunden hat.

Auf alle drei Variablen werden deshalb Schocks angewendet, die sich negativ auf das Ergebnis des Versicherers auswirken. Anhand der geschockten Werte können die Zahlungsströme neu berechnet werden um abzuschätzen, ob und in welchem Umfang zusätzliche Reserven gebildet werden müssen.

Aktienindex

In Abschnitt 4.3 wurde anhand von Abbildung 12 gezeigt, wie die Zahlungsströme des Versicherers von der Entwicklung des Aktienindex abhängen. Es konnte ein klarer Zusammenhang zwischen der Höhe der Aktienrendite und des erzielten Gewinns beobachtet werden, wohingegen die Rolle der Volatilität für den Gewinn des Versicherers nicht eindeutig war.

In diesem Abschnitt werden deshalb zwei Arten von Schocks auf den Aktienindex angewendet um die Auswirkungen auf die Reserven und Rückstellungen abzuschätzen. Zum einen wird der Mittelwert μ der täglichen Aktienrendite in Gleichung 1 gesenkt, so dass die Rendite insgesamt sinkt. Als zweiter Schock wird die Volatilität des Index verändert. Dazu werden die Fehlerterme ε aus Abschnitt 3.3 erhöht um anschließend die resultierenden Rückstellungen und Reserven zu berechnen. Denkbar wäre jedoch ebenso eine Änderung der Parameter des GARCH Modells.

Eine niedrigere Volatilität wird nicht untersucht, da diese die Reserven nicht negativ beeinflusst. Dies liegt daran, dass der Ratchet Betrag zur Berechnung der Mindestrente sensitiv auf Volatilität reagiert: Steigt diese, resultiert dies in höheren Annuitäten. Da die Reserven wiederum zum Großteil von der Höhe der

ausgezählten Renten abhängen ist eine Senkung der Volatilität hinfällig. Die weiteren Ausführungen belegen dies.

Der Mittelwert der täglichen Rendite liegt für den S&P 500 bei etwa $\mu = 0.0299\%$. Der Parameter sorgt für den Drift in Gleichung 1, so dass die Aktienkurse langfristig steigen. Jährlich bedeutet dies einen Mittelwert von etwa 7.76%. Um den Einfluss des langfristigen Mittelwertes auf die Reserven und Rückstellungen abzuschätzen, wird dieser auf ein jährliches Niveau von 5% und 2.5% gesenkt. Die Auswirkungen auf die Reserven sind in folgendem Plot dargestellt.

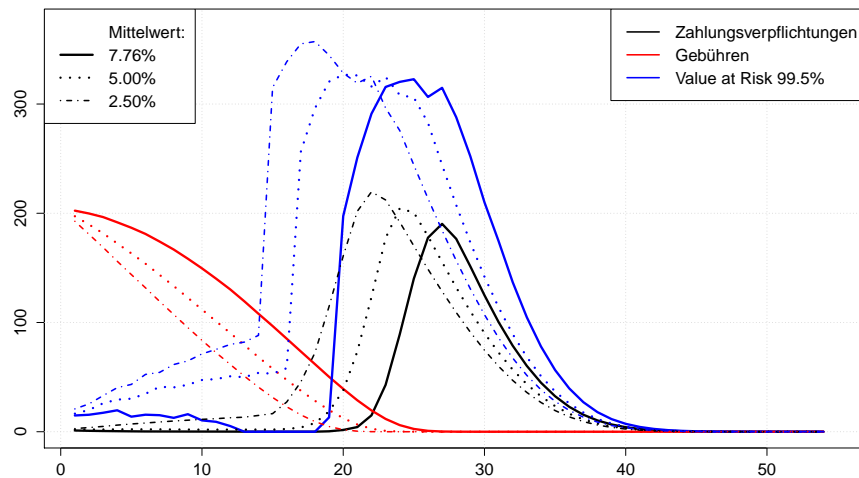


Abbildung 15: Reserven bei veränderten Mittelwerten der Aktienrendite

Insgesamt sind drei Einflüsse zu beobachten, der schwerwiegendste Effekt ist die Senkung der Gebühreneinnahmen. Diese hängen direkt vom Investment ab, so dass niedrigere Renditen mit sinkenden Gebühreneinnahmen einhergehen. Der zweite Effekt ist die Verschiebung der Zahlungsverpflichtungen nach links, so dass die Auszahlung eher erfolgt aber auch früher endet. Dies ist dadurch bedingt, dass das Guthaben mit niedrigerer Rendite eher erschöpft ist, so dass die Auszahlung der Annuität früher beginnt. Gleichzeitig ist die Rente jedoch auch niedrigerer, da deren Höhe wiederum vom der Performance der Aktie abhängt.

Die Reserven steigen insgesamt jedoch verhältnismäßig wenig an. Schließlich steigen die Auszahlungen für den GMDB, die nur im Todesfall erfolgen. Durch den niedrigeren Mittelwert steigt die Wahrscheinlichkeit, dass negative Renditen realisiert werden, die das Guthaben schnell dahinschmelzen lässt. Dadurch steigen auch die Garantien für den Todesfall mit sinkender Performance des Investments an.

Während Abbildung 15 lediglich eine Verschiebung der Zahlungsströme suggeriert, wird die Wirkung des Schocks auf den Gewinn des Versicherers in den folgenden beiden Grafiken bei der Betrachtung der Rückstellungen deutlicher. Abgebildet sind die jeweiligen Rückstellungen bei einer jährlichen Rendite von 5% beziehungsweise 2.5%. Als Referenz dient Grafik 14, in der die Rückstellungen ohne jeglichen Schock dargestellt waren.

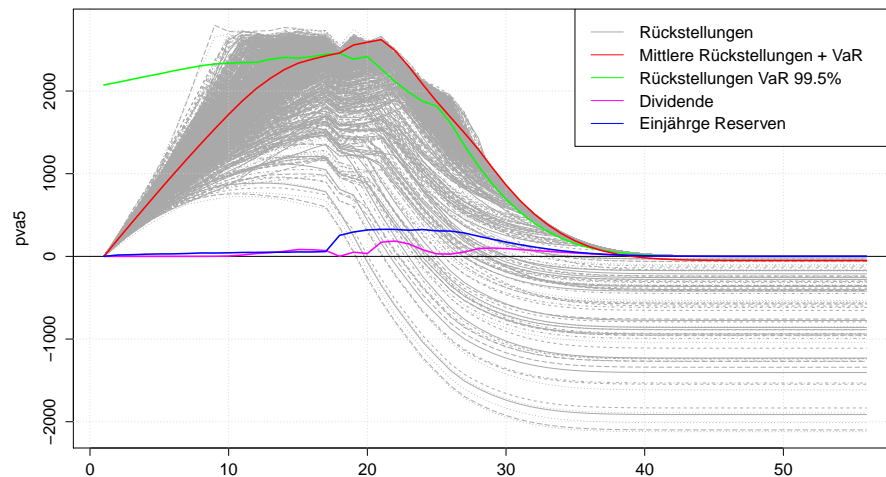


Abbildung 16: Rückstellungen bei einer jährlichen Aktienrendite von 5.00%

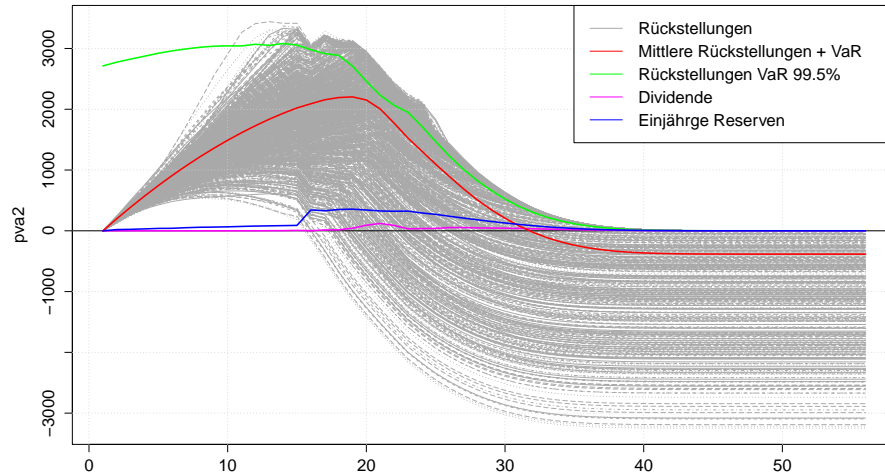


Abbildung 17: Rückstellungen bei einer jährlichen Aktienrendite von 2.50%

Im Vergleich zu Abbildung 14 ist deutlich zu erkennen, dass die benötigten Rückstellungen negativ mit der Höhe der jährlichen Aktienrendite zusammenhängen. Der Unterschied der Rückstellungen zwischen einer Rendite von 7.76% und 2.5% beträgt zeitweise über 1000\$. Dementsprechend werden die Gebühren längere Zeit angespart und insgesamt weniger Dividenden ausgeschüttet. In Abbildung 17 erreichen die Rückstellungen im Mittelwert darüber hinaus nie das notwendige Niveau für einen Value at Risk von 99.5%.

Die negative Tendenz spiegelt sich auch in der steigenden Zahl an Pfaden, die bei Vertragsende einen negativen Rückstellungsbetrag aufweisen. Für diese sind demzufolge Zuzahlungen aus dem Eigenkapital notwendig. Für eine Aktienrendite von 5% sind dies insgesamt 68 Pfade, bei einer jährlichen Rendite von 2.5% haben sogar 328 Pfade einen negativen Endwert. Die Ursache liegt an der ausgeprägten adversen Entwicklung, der Barwert der Gebühreneinnahmen reicht für die betroffenen Pfade nicht aus um den Barwert der Zahlungsverpflichtungen zu decken.

Auf den ersten Blick überraschend ist, dass die Rückstellungen trotz niedrigerer Renditen in Grafik 17 teilweise höhere Werte annehmen als in den vorherigen beiden Abbildungen. Die Ursache darin kann in den Dividenden ausgemacht werden. Im Vergleich zu den vorherigen Grafiken werden in Abbildung 17 kaum noch Dividenden ausgeschüttet. Die Rückstellungen fallen bei niedrigeren Ent-

nahmen größer aus und erwirtschaften wiederum höhere Zinsen, das Kapital ist jedoch gebunden. In den vorherigen Grafiken kann über die ausbezahlten Dividenden frei verfügt werden, so dass insgesamt höhere Gewinne realisiert werden.

Die Ergebnisse einer veränderten Aktienrendite werden schließlich in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Angegeben sind die mittleren Barwerte der Gebühreneinnahmen und der Zahlungsverpflichtungen. Die Differenz beider Beträge ist der mittlere Gewinn des Versicherers. Zusätzlich wird die Veränderung zum Zustand ohne Einwirken eines Schocks berechnet.

Jährl. Aktienrendite	7.76%	5.00%	2.50%
Gebühreneinnahmen	2117.25	1678.67	1378.13
Zahlungsverpflichtungen	671.75	870.48	1211.61
Differenzbetrag	1445.51	808.19	166.52
Veränderung (in %)	0.00	−42.98	−88.25

Tabelle 10: Barwerte der Zahlungsströme bei verringerter jährlicher Aktienrendite

Nachdem der Effekt der mittleren Rendite untersucht wurde, werden nun die Auswirkungen von steigender Volatilität des Marktes untersucht. Die Höhe der Fehlerterme ε im GARCH Modell wird dazu sukzessive um 5% und 10% erhöht. Die Ergebnisse werden anhand der bekannten Plots dargestellt.

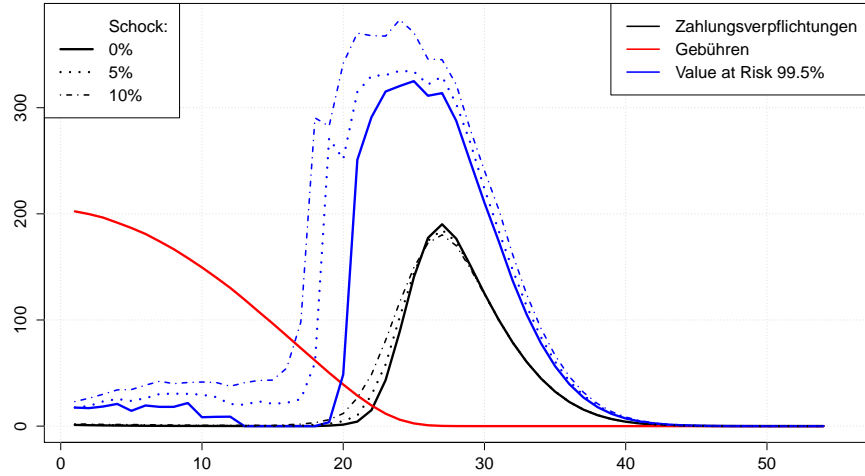


Abbildung 18: Reserven bei einer erhöhter Volatilität der Aktienrendite

Anders als beim Schock der mittleren Aktienrendite ändert sich der Erwartungswert der Gebühreneinnahmen nicht, dies ist nicht weiter verwunderlich, da lediglich eine lineare Transformation vorliegt.

Die gestiegenen Reserveanforderungen hingegen sind ein direkter Effekt der höheren Volatilität, da die Wirkung negativer Entwicklungen des Investments noch verstärkt wird. Pfade deren Guthaben nach einer bestimmten Anzahl an Perioden erschöpft war, erreichen diesen Punkt durch die gestiegene Volatilität tendenziell noch früher. Dies kann auch der Tabelle der Zahlungsströme entnommen werden.

Volatilitätsanstieg	0%	5%	10%
Gebühreneinnahmen	2117.25	2104.22	2087.44
Zahlungsverpflichtungen	671.75	702.52	755.55
Differenzbetrag	1445.51	1401.70	1417.45
Veränderung (in %)	0.00	-1.11	-1.90

Tabelle 11: Barwerte der Zahlungsströme bei erhöhter Volatilität der Aktienrendite

Auch die benötigten Rückstellungen steigen aufgrund der höheren Volatilität an. Erneut sinken deshalb die ausgezahlten Dividenden, da ein größerer Teil der Einnahmen einbehalten werden muss. Der Zeitpunkt, zu dem das notwendige Level der Rückstellungen gemäß dem Value at Risk erreicht ist, verschiebt sich im Mittelwert mit steigender Volatilität nach rechts. Dennoch sinken die Rückstellungen im Erwartungswert in späteren Perioden nicht mehr unter das erforderliche Niveau.

Extreme Effekte werden ansonsten noch weiter verstärkt, so dass einige Pfade ein sehr deutliches, negatives Ergebnis aufweisen, dies gilt jedoch gleichsam für positive Verläufe. Die Ergebnisse können den folgenden Abbildungen entnommen werden, die in bekannter Manier Abbildung 14 nachempfunden sind.

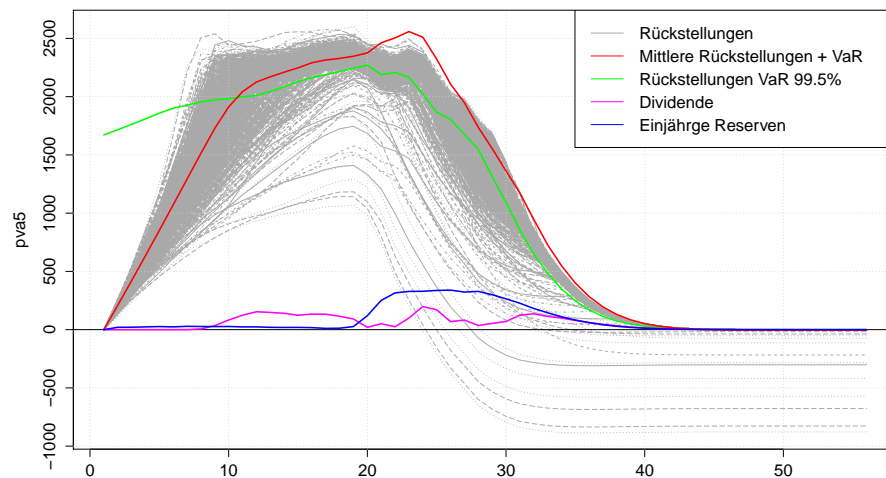


Abbildung 19: Rückstellungen bei einer um 5% erhöhten Volatilität der Aktienrendite

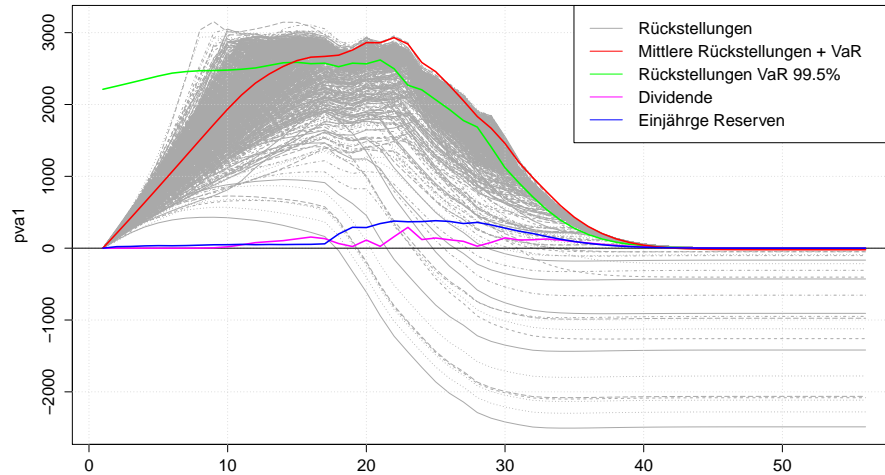


Abbildung 20: Rückstellungen bei einer um 10% erhöhten Volatilität der Aktienrendite

Zinsen

In Kapitel 3.5 ist bereits deutlich geworden, dass das Zinsmodell keine gute Approximation der realen Daten darstellt. Der kritische Parameter im CIR Modell war der Mittelwertparameter μ , der die verschiedenen Zinsniveaus im Datensatz aufgrund seines konstanten Wertes nicht modellieren kann.

Für die anderen beiden Parameter im CIR Modell liegen keine eindeutigen Anzeichen dafür vor, dass diese fehlerhaft in Bezug auf die Realität sind. Darüber hinaus ist ihre Relevanz für die Berechnung der jährlichen Zinsen untergeordnet, da sich stärkere Schwankungen durch einen höheren Parameter σ oder eine niedrigere Mean-Reversion α über ein Jahr hinweg tendenziell ausgleichen.

Aus diesem Grund scheint der Mittelwertparameter μ der kritische Parameter im Zinsmodell zu sein. Um die Auswirkungen auf die Reserven zu überprüfen, werden die Berechnungen für 1000 Pfade erneut durchgeführt, wobei jedoch μ für unterschiedliche Pfade variiert wird.

Möglichkeiten, um verschiedene Ausprägungen für μ zu erhalten, wäre das Ziehen aus der empirischen Verteilung des Datensatzes oder aus der geschätzten Gammaverteilung wie in Abbildung 7. Da jedoch lediglich der Effekt unterschiedlicher, langfristiger Zinsniveaus auf die Zahlungsströme geschätzt werden

soll, werden jeweils 200 Pfade für ein Zinsniveaus von 0.5%, 1.5%, 2.5%, 3.5% und 4.5% berechnet. Zwar wäre eine höhere Anzahl an Pfaden wünschenswert, dies ist jedoch aufgrund der hohen Rechenzeit durch die Copula schwer umsetzbar.

In Kapitel 3.2 war der geschätzte Wert für den Mittelwertparameter $\hat{\mu}_{CIR} = 3.23$. Durch die fünf unterschiedlichen Zinsniveaus wird sowohl ein höherer, als auch ein niedrigerer Zins berücksichtigt. Letzterer ist von besonderem Interesse, da die Rückstellungen des Versicherers sensitiv auf langfristige Zinssenkungen reagieren. Dies liegt am Auszahlungsprofil wie es in Kapitel 4.1 dargestellt wurde. Der Barwert der zukünftigen Auszahlungen ist somit umso höher, je niedriger die Zinsen sind et vice versa.

Auf die Reserven hat der Zins dagegen keine Auswirkungen, da keine Barwerte oder Marktzinsen zur Berechnung benötigt werden. Somit werden in diesem Abschnitt einzig die Rückstellungen näher betrachtet.

Die Auswirkungen der verschiedenen Zinsniveaus auf die Barwerte der Zahlungsströme können anhand folgender Tabelle nachvollzogen werden.

Langfristiger Zins μ	0.5%	1.5%	2.5%	3.5%	4.5%
Gebühreneinnahmen	2565.78	2387.24	2251.38	2094.02	2014.58
Zahlungsverpflichtungen	1308.45	1043.44	806.71	636.52	479.54
Differenzbetrag	1257.33	1343.80	1444.67	1457.50	1535.04

Tabelle 12: Barwerte der Zahlungsströme für unterschiedliche Zinsniveaus

Tabelle 12 bestätigt, dass niedrige Zinsen schlecht für Lebensversicherer sind. Aufgrund der zeitlichen Struktur der Zahlungsströme sinken die Gewinne des Versicherers bei fallenden Zinsen. Die Einnahmen erfolgen in den frühen Vertragsjahren, so dass der Diskontierungseffekt nicht so ausgeprägt ist, wie bei den Ausgaben, die in späteren Vertragsjahren stattfinden.

Dadurch dass der Barwert der Auszahlungen steigt, müssen folgerichtig auch die Rückstellungen erhöht werden um diese in der Zukunft zu bedienen. Die bisherigen Betrachtungen haben jedoch gezeigt, dass höhere Rückstellungen zu niedrigeren Dividenden führen, so dass mehr Kapital gebunden ist. Somit beeinträchtigen niedrige Zinsen das Geschäft der Lebensversicherer in doppelter Weise.

Die genauen Auswirkungen der verschiedenen Zinsniveaus sind aus Platzgründen an dieser Stelle nicht grafisch dargestellt, können aber anhand der Abbildungen in Anhang C nachvollzogen werden.

Sterbetafel

Bereits in Kapitel 3.4 wurde die Problematik bei der Verwendung von Sterbetafeln angesprochen. Für den Fall, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten überschätzt werden, sind deutlich höhere Reserven nötig, da auch die Rentenzahlungen im Durchschnitt länger erfolgen. Im Jargon der Versicherer spricht man auch vom Langlebkeitsrisiko.

Um die Auswirkungen dieses Risikos auf Reserven und Rückstellungen abschätzen zu können, werden die Zahlungsströme für niedrigere Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet, dazu werden die Werte in den Sterbetafeln jeweils um 1%, 2%, 5%, sowie 10% gesenkt. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Überlebensraten werden in folgender Tabelle zusammengefasst.

Erhöhung	0%	1%	2%	5%	10%
Gebühreneinnahmen	2117.25	2120.76	2127.73	2134.89	2152.82
Zahlungsverpflichtungen	671.75	684.40	710.28	737.856	811.66
Differenzbetrag	1445.51	1436.36	1417.45	1397.03	1341.16
Veränderung (in %)	0.00	-0.63	-1.90	-3.35	-7.22

Tabelle 13: Barwerte der Zahlungsströme bei Langlebkeitsrisiken

Neben den Zahlungsverpflichtungen steigen auch die Gebühreneinnahmen aufgrund der höheren Zahl an lebenden Versicherungsnehmern in frühen Vertragsjahren an. Da die Sterbewahrscheinlichkeiten im Alter jedoch zunehmen, gleicht dieser Effekt nicht die gleichzeitig steigenden Zahlungsverpflichtungen aus. Der Differenzbetrag zwischen Einnahmen und Ausgaben sinkt, so dass mit sinkender Sterbewahrscheinlichkeit auch die Gewinne des Versicherers sinken. Die Höhe der Veränderung ist jedoch unterproportional im Vergleich zur Höhe des Schocks.

Auch die benötigten Reserven pro Periode steigen nur leicht an, um dies zu illustrieren wird Abbildung 13 für die verschiedenen Schocks neu berechnet. Die Änderungen an den Einnahmen aus den Gebühren (in rot) und den erwarteten Auszahlungen (in schwarz) sind so gering, dass man die Unterschiede kaum erkennt und sind aus Gründen der Übersicht nicht eingezeichnet.

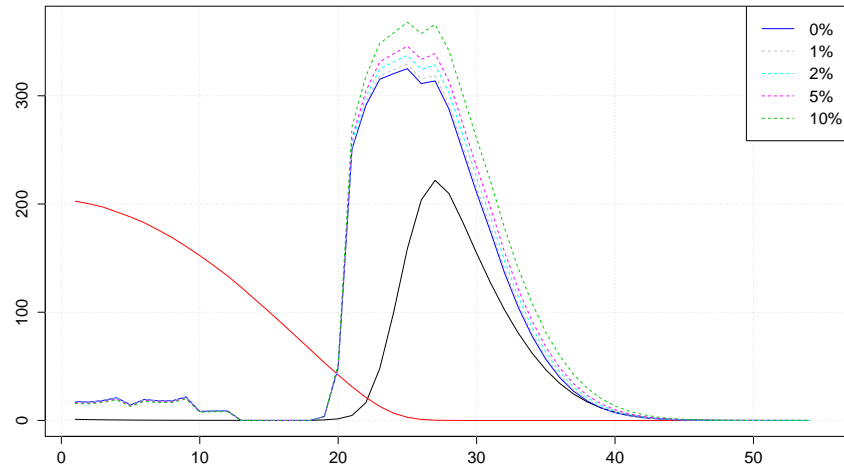


Abbildung 21: Veränderung der Reserven unter Solvency II bei Langlebigkeitsrisiken

Auch die Auswirkungen auf die Rückstellungen sind eher gering, dazu wird Abbildung 14 für den 10% Schock neu berechnet.

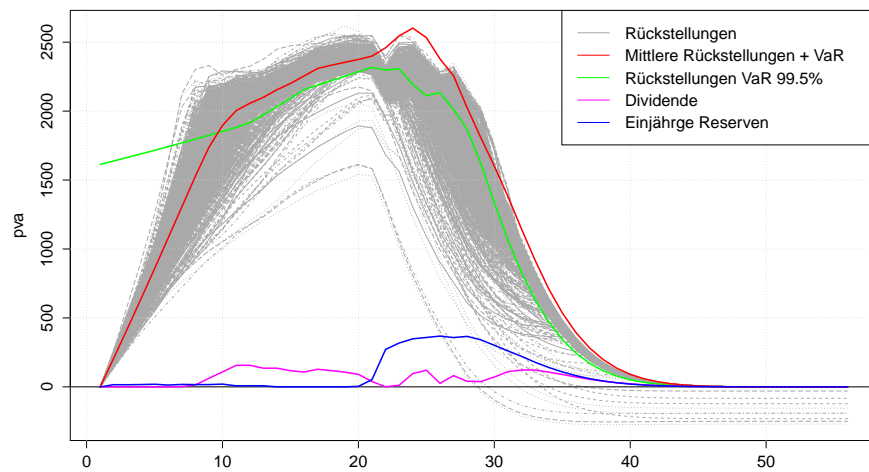


Abbildung 22: Rückstellungen bei einer um 10% niedrigeren Sterbewahrscheinlichkeit

Man erkennt, dass die Rückstellungen bei Vorliegen eines Langlebigkeitsschocks insgesamt höher liegen im Vergleich zu Abbildung 14. Die Auswirkungen sind jedoch weniger ausgeprägt, als bei den bisherigen Schocks. Zwar reichen die ursprünglichen Rückstellungen bei einem Schock von 10% nicht für einen Value at Risk von 99.5% aus, jedoch fällt der Unterschied wertmäßig nicht so hoch aus wie beispielsweise beim Schock des Aktienindex. Durch die gestiegenen Anforderungen an die Rückstellungen sinkt jedoch auch für das Langlebigkeitsrisiko die Summe der Dividenden. Somit kann resümiert werden, dass auch für die Sterbetafel eine Anpassung der Reserven und Rückstellungen notwendig ist, um einem tadellosen Risikomanagement gerecht zu werden.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden bisher die Auswirkungen von Schocks auf den Aktienindex, die Zinsrate und die Sterbewahrscheinlichkeiten untersucht. Um die Auswirkungen der jeweiligen Entwicklungen zu berücksichtigen müssen somit zusätzliche Reserven und Rückstellungen gebildet werden. Fraglich ist bisher jedoch die Höhe der zusätzlich benötigten Gelder.

Alle drei Variablen wurden in der Modellierung auf historische Daten kalibriert, so dass das Eintreten der Schocks in ihren Extremformen als eher unwahrscheinlich einzustufen ist. In einem Worst-Case Szenario würden diese Extremformen für alle drei Variablen eintreten, so dass ein Maximum an Reserven und Rückstellungen notwendig ist. Es stellt sich daher die Frage, wie hoch die Eintrittswahrscheinlichkeit dieses Worst-Case ist und wie hoch die Reserven und Rückstellungen dementsprechend anzusetzen sind.

Aus Kapitel 3.3 ist bekannt, dass die geschätzte Abhängigkeit zwischen dem Aktienindex und der Zinsrate sehr gering ausgeprägt ist. Darüber hinaus existiert keine sinnvolle Begründung, warum eine ausgeprägte Abhängigkeit zwischen der Sterbetafel und dem Aktienindex oder der Zinsrate bestehen sollte. Die Schlussfolgerung ist deshalb, dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Extremformen aller drei Variablen unabhängig voneinander betrachtet werden. Somit wird für jeden Schock eine gesonderte Reserve zurückgehalten, die bei der Berechnung der Reserven separat angegeben wird.

Die Höhe der zusätzlichen, benötigten Reserven ist unklar, da das Worst-Case Szenario bisher nicht definiert war. Für jedes schlechte Szenario ist jederzeit eine noch schlimmere Variante konstruierbar. Die Aufsichtsbehörden jedes Landes geben deshalb ein Worst-Case Szenario für jegliche Art von Schock vor, an

denen sich die Versicherer richten können. Die benötigten Zusatzreserven ergeben sich deshalb anhand des Unterschieds zwischen den Szenarien und dem Worst-Case, wie in dieser Arbeit beispielhaft berechnet.

5.2 Schätzrisiko

Ein anderes Risiko betrifft die geschätzten Modellparameter. Geht man davon aus, dass die Modellannahmen korrekt sind, besteht dennoch das Risiko falsche Schätzverfahren verwendet zu haben. Um dies zu überprüfen bietet sich das Bootstrap Verfahren an. Aus den Datensätzen werden dazu eine Anzahl an Bootstrap-Stichproben mit Zurücklegen gezogen, für die wiederum die jeweiligen Modellparameter geschätzt werden können.

Diese Methodik lässt sich jedoch nicht auf alle Schätzer sinnvoll anwenden. Da die Maximum Likelihood Schätzung der Parameter im CIR Modell sehr rechenintensiv ist, gestaltet sich das Bootstrap Verfahren unverhältnismäßig zeitaufwendig, stattdessen kann nur der Kleinste Quadrate Schätzer überprüft werden. Darüber hinaus wird sich zeigen, dass bei Zeitreihen aufgrund der zeitlichen Abhängigkeit ebenfalls Schwierigkeiten bestehen.

In dieser Arbeit wird die Überprüfung der Schätzverfahren als Erstes anhand der Abhängigkeitsstruktur der Copula gezeigt. Da die Standardgleichverteilung der Zinsrate aus Abbildung 6 äußerst heterogen ist, könnte ein ausgeprägter Schätzfehler für den Copula Parameter ρ vorhanden sein.

Der Datensatz zur Schätzung von ρ besteht aus den Paaren der transformierten Quantile des Aktienindex und der Treasury Bill. Aus diesen werden insgesamt 1000 Bootstrap-Stichproben gezogen, für die ρ wiederum berechnet wird. Die Ergebnisse lassen sich anhand der folgenden Grafiken nachvollziehen.

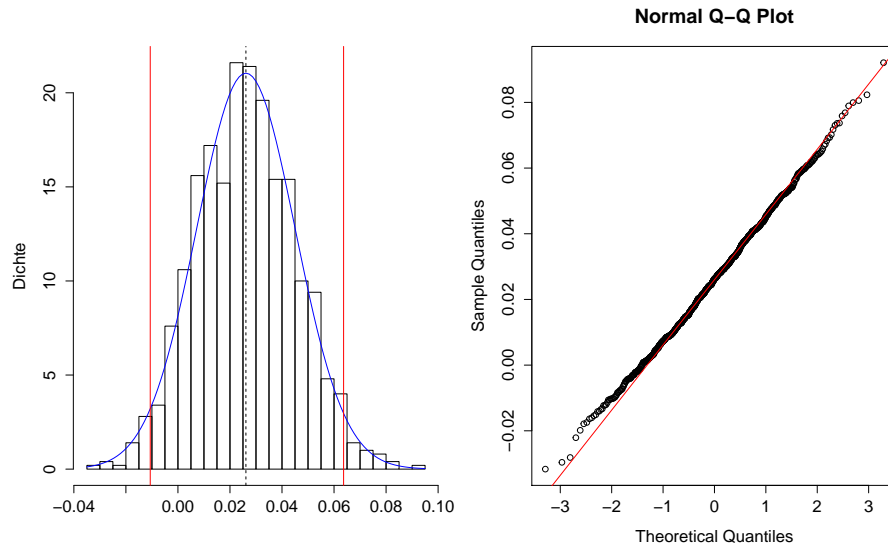


Abbildung 23: Verteilung des geschätzten Parameters der Copula ρ mithilfe von Bootstrap

Das Histogramm zeigt die Verteilung der Schätzer aus dem Bootstrap Verfahren. Man erkennt, dass dieser normalverteilt ist, dazu wurde in blau die theoretische Dichte der Normalverteilung eingezeichnet. Die Gestrichelte Linie markiert zudem den Mittelwert, dieser liegt bei etwa $\bar{\rho} = 0.026129$ und damit sehr nahe beim tatsächlich geschätzten $\hat{\rho} = 0.026322$. Weiterhin ist das Konfidenzintervall in rot eingezeichnet, dieses nimmt die Werte $(-0.0106, 0.0637)$ an. Der QQ Plot bestätigt noch einmal die Normalverteilung.

Schließlich kann anstelle der Gauß Copula beispielsweise auch eine t Copula verwendet werden. Der geringe Korrelationskoeffizient ρ spricht jedoch ebenfalls gegen einen starken Einfluss auf die Modellierung, da für die Gauß Copula bereits nahezu Unabhängigkeit vorliegt. Berechnet man dennoch die Zahlungsströme für die t Copula, ergeben sich keine nennenswerten Auswirkungen auf die Reserven oder Rückstellungen.

Für das Zinsmodell und den Aktienindex ist Bootstrapping nicht ohne weiteres möglich, da die zeitliche Abhängigkeit in der Schätzung berücksichtigt werden muss. Als Ausweg wird ein so genannter Block Bootstrap durchgeführt, dazu werden aus der Zeitreihe Blöcke mit vorgegebener Größe gezogen, aus denen eine neue Zeitreihe gebildet wird.

Für den Aktienindex besteht der Datensatz zur Schätzung des GARCH(2,1) Modells aus den täglichen Renditen, die Blockgröße kann anhand verschiedener Kriterien gewählt werden, einen Algorithmus dafür beschreibt beispielsweise Politis and White (2004), demnach ergibt sich eine Blockgröße von etwa 9 Handelstagen. Zur Abschätzung der Ergebnisse wird das Bootstrap Verfahren darüber hinaus mit einer Blockgröße von 250 Handelstagen durchgeführt. Bei der Berechnung von Konfidenzintervallen müssen die Beschränkungen der Parameter im GARCH Modell beachtet werden. Insbesondere α_1 und β_1 liegen sehr nahe an Null beziehungsweise Eins, so dass die geschätzten Bootstrap Parameter mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht normalverteilt sind. Aus diesem Grund werden anstelle der Konfidenzintervalle lediglich die $\frac{\alpha}{2}$ und $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantile angegeben.

Die Ergebnisse des Block Bootstrap Verfahrens sind in den folgenden Tabelle dargestellt.

Parameter	Originaler Wert	Bootstrap Mittelwert	2.5% Quantil	97.5% Quantil
ω	9.120e-07	2.9135e-05	2.2335e-05	3.6714e-05
α_1	0.0157	0.125049	0.077010	0.177883
α_2	0.0685	0.206469	0.141916	0.274094
β_1	0.9106	0.500771	0.419994	0.575518

Tabelle 14: Ergebnisse des Block Bootstrap Verfahrens für den Aktienindex für eine Blockgröße von 9 Handelstagen

Parameter	Originaler Wert	Bootstrap Mittelwert	2.5% Quantil	97.5% Quantil
ω	9.120e-07	1.7612e-06	9.0714e-07	3.0093e-06
α_1	0.0157	0.021464	0.000001	0.047868
α_2	0.0685	0.090061	0.047815	0.133098
β_1	0.9106	0.878262	0.842268	0.913569

Tabelle 15: Ergebnisse des Block Bootstrap Verfahrens für den Aktienindex für eine Blockgröße von 250 Handelstagen

Für die berechnete Blockgröße von 9 Handelstagen liegen die geschätzten Ergebnisse bis auf α_1 außerhalb der berechneten Quantile. Der Vergleich mit Tabelle 15 zeigt jedoch, dass scheinbar die zeitliche Abhängigkeit durch die geringere Blockgröße zu sehr verloren gegangen ist. Dagegen liegen alle vier Parameter für die Schätzung mit Blöcken von 250 Handelstagen innerhalb der berechneten Quantile. Die hohe Länge der Zeitreihe von 5795 Handelstagen rechtfertigt darüber hinaus eine höhere Blockgröße.

Die Plausibilität der simulierten Szenarien wurde zudem in Abschnitt 4.1 überprüft. Die Ausprägungen der Aktienkurse entspricht den Erwartungen aus den historischen Daten. Es ist deshalb nicht davon auszugehen, dass die Schätzung der Parameter im GARCH Modell derart fehlerbehaftet ist, dass die Zahlungsströme stark veränderte Ergebnisse lieferte.

Bezüglich der Wahl der Lags im GARCH(p,q) Modell wird an dieser Stelle auf Abschnitt 3.1 verwiesen. In diesem wurde gezeigt, dass AIC und BIC für verschiedene Lags kaum voneinander abweichen, so dass auch eine Modellierung anhand anderer Ausprägungen von p und q denkbar wäre.

Für das CIR Modell scheitert die Block Bootstrap Methode dagegen vollständig an der Wahl der Blockgröße. Selbst wenn diese sehr groß gewählt wird, springen die Zeitreihen bei den Übergängen zwischen zwei Blöcken äußerst stark. Dadurch ist eine sinnvolle Schätzung des Mean-Reversion Parameters α im CIR Modell nicht mehr möglich. Die Sprünge sind in der folgenden Grafik beispielhaft für zwei Samples abgebildet, als Blockgröße wurden 250 Tage gewählt. Eine geringere Blockgröße verschlechtert dieses Resultat zusätzlich.

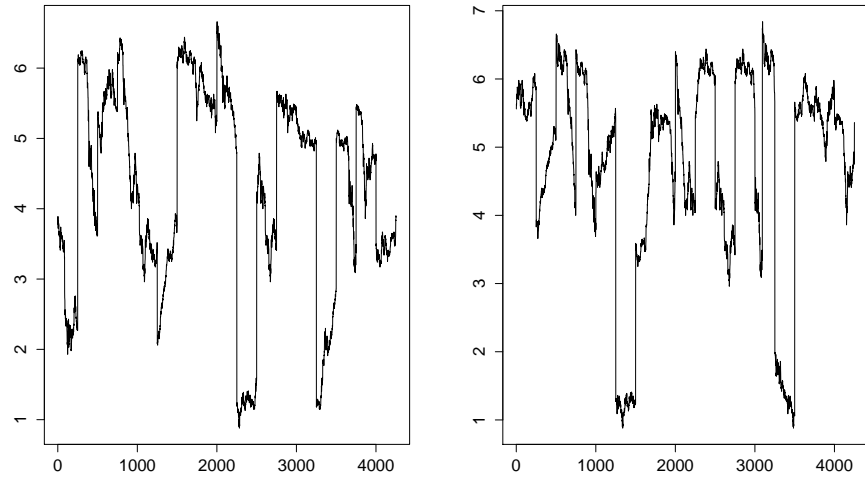


Abbildung 24: Resampling von Zeitreihen für Zinsraten mittels Block Bootstrap

Die Parameter im CIR Modell können somit nicht mittels Bootstrap verifiziert werden. Die Ausführungen in den Abschnitten 3.2 und 5.1 führen vielmehr zur Folgerung, dass die Parameter keine adäquate Modellierung für die historische Zinsrate sind. Die berechneten Risiken aus den Zinsen müssen deshalb mit besonderer Vorsicht genossen werden, insbesondere eine anhaltende Niedrigzinsphase, die im Modell keine Berücksichtigung findet gehört zu den Gefahrenquellen.

6 Ausblick

In den bisherigen Kapiteln wurden das Risikomanagement für Variable Annuitäten untersucht, dennoch bleiben viele Aspekte unberücksichtigt, die aus Gründen des Umfangs in dieser Arbeit nicht behandelt wurden. In diesem Kapitel wird deshalb ein Ausblick auf Themen gegeben, deren weitere Vertiefung lohnenswert erscheint.

6.1 Solvency II

Wenn in dieser Arbeit bisher von Solvency II die Rede war, ging es meistens um den bekannten Value at Risk, der laut den Anforderungen an Versicherer bei 99.5% liegt. Die Richtlinien umfassen jedoch ein deutlich größeres Themenspektrum, das sogar in hoher Detailstufe Regelungen zur Bildung der Reserven für einzelne Produkte vorgibt.

Dagegen stand in dieser Arbeit die Berechnung von plausiblen Szenarien und deren Analyse im Vordergrund. Dadurch entstanden an vielen Stellen Ungenauigkeiten bezüglich der konkreten Richtlinien, die jedoch aus didaktischen Gründen sinnvoll erscheinen. Die Vorgaben gehen an vielen Stellen mehr ins Detail als diese Arbeit abdecken kann, so dass der Schwerpunkt nicht auf der Umsetzung der genauen Solvency II Standards lag, sondern auf der plausiblen Berechnung von Reserven und Rückstellungen für ein Versicherungsprodukt.

Diese Arbeit ist somit lediglich als Grundlage für das Risikomanagement von Variablen Annuitäten anzusehen und kann nicht dazu verwendet werden, die Reserven in der Realität abzubilden.

6.2 Zinsmodelle

Die Simulation der Zinsen ist eine der größten Herausforderungen dieser Arbeit gewesen. Das verwendete CIR Modell kann zwar wesentliche Merkmale der Zinsrate adäquat abbilden, schafft es jedoch nicht unterschiedliche Zinsniveaus, die im Datensatz auftraten zu modellieren. Die intuitive Lösung für dieses Problem ist, den Mittelwertparameter μ flexibler zu gestalten. Dies wird in drei Modellen auf unterschiedliche Art und Weise durchgeführt.

In der Arbeit von Hull and White (1990) sind die bekannten Parameter aus dem CIR Modell zeitabhängig. Dies führt dazu, dass unterschiedliche Zinsniveaus durch einen zeitabhängigen Parameter μ beschrieben werden können. Wahlweise sind der Mean-Reversion Parameter α , sowie der Volatilitäts Parameter σ

fest oder ebenfalls abhängig von der Zeit. Die Modellierung ist damit insgesamt für verschiedenen Datensätze flexibler.

Nachteilig ist jedoch, dass die Differentialgleichung anders als im CIR Modell keine Lösung hat, die eine direkte Simulation erlaubt. Darüber hinaus können die Parameter nicht anhand von Marktdaten geschätzt werden sondern müssen anhand von beobachteten Marktpreisen ermittelt werden.

Für Simulationszwecke ist auch das Zwei Faktoren Modell von Longstaff and Schwartz (1992), sowie das Drei Faktoren Modell von Chen (1996) zu erwähnen. In beiden Modellen werden bestimmte Faktoren des Zinsprozesses als stochastische Prozesse modelliert, so dass die Simulation breitere Ergebnisse verspricht. Jedoch ist auch für diese Modelle die Parameterschätzung und die nicht existierenden Lösungen für die jeweiligen Differentialgleichungen ein Problem in der Praxis.

Für das Risikomanagement in dieser Arbeit erscheint das CIR Modell deshalb angebracht. Der Schwäche des starren Mittelwertparameters wurde durch die gezielte Berechnung von Zinspfaden mit unterschiedlichen Ausprägungen des Mittelwertsparameters in Abschnitt 5 entgegengewirkt.

Die Liste weiterer Zinsmodelle kann noch deutlich erweitert werden, jedoch ist in jedem Modell eine Abwägung zwischen Umsetzbarkeit und erreichtem Fit zu treffen, die der jeweiligen Anwendung gerecht wird.

6.3 Hedging

Eine andere Möglichkeit Risiken aus Marktbewegungen abzusichern sind Termingeschäfte auf Aktienkurse oder Zinsraten, im Jargon der Finanzbranche ist dabei von Hedging die Rede. Dazu werden für jede Periode die es zu besichern gilt Call Optionen für Aktien und Zinsraten gekauft, deren Ausübungspreis jeweils eine bestimmte untere Grenze der jeweiligen Variable ist. Der Versicherer trägt dann die Risiken bis zum Ausübungspreis selbst, darüber hinaus greift die Option um mögliche Verluste zu decken. Auf diese Weise kann das Risiko aus den Zinsen, sowie für die GMDG Garantie besser kontrolliert werden. Die GMDG Garantie ist dagegen deutlich komplizierter durch Optionen zu steuern, da die langfristige Höhe der Annuität von Aktienentwicklungen aus früheren Perioden abhängt.

Letztendlich ist der Erwerb von Optionen nichts anderes als Glättung des Profits. Verluste in bestimmten Perioden werden durch die Optionen wett gemacht, die Kosten dafür müssen jedoch aus Perioden mit Überschüssen entnommen

werden.

Für ein effektives Hedging ist die Berechnung der Sensitivitätskennzahlen von Optionen zwingend erforderlich. Diese so genannten „Griechen“ beschreiben, wie sich der Preis einer Option für Änderungen bestimmter Parameter verändert. Beispielsweise gibt das *Delta* an, wie sich der Preis einer Option bei einer Wertänderung des Basispreises ändert.

Die Berechnung der Griechen erfolgt ebenfalls über Simulationsverfahren. Da sich der Wert immer über eine Ableitung des Optionspreises über den gesuchten Parameter ergibt, können die über eine Taylor Approximation berechnet werden. Dazu müssen jedoch die Szenarien mehrmals generiert werden und jeweils alle Zahlungsströme berechnet werden, so dass Hedging in der Praxis mit einem deutlichen Mehraufwand an Rechenzeit verbunden ist.

Eine weitere Möglichkeit des Hedging für den Aktienmarkt bieten auch so genannte Target Volatility Funds. Diese Art von Fonds offerieren eine stets konstante Varianz für die Aktienkurse, so dass Risiken aufgrund von kurz- oder mittelfristigen Marktschwankungen ausgeglichen werden können.

6.4 Bewertung der Garantien

Für die Bilanz eines Versicherungsunternehmens ist es notwendig, den Bestand der Verträge zu bewerten. Dies ist aufgrund der zufallsbedingten Ausprägungen zwar nicht exakt möglich, die Bewertung über Simulationsverfahren, wie sie in dieser Arbeit angewendet wurden sind jedoch zulässig. Problematisch ist dagegen die Bewertung der Garantien, da diese separat angegeben werden müssen. In Kapitel 2.3 wurde dargelegt, dass die Bewertung der Garantien nicht analytisch erfolgt, sondern ebenfalls durch Simulation. Um deshalb den Wert der Garantien zu einem bestimmten Zeitpunkt in jedem Pfad zu ermitteln, ist eine doppelte oder auch genestete Simulation notwendig.

Um die Garantie zu einem Zeitpunkt t zu bewerten, ist eine so genannte risikoneutrale Bewertung erforderlich, die Grundlagen der Optionsbewertung gehen auf Arrow and Debreu (1954) zurück, der auch das Konzept der risikoneutralen Bewertung in seiner Arbeit erläutert. Zur Ermittlung des Wertes einer Option oder Garantie wird davon ausgegangen, dass das Investment unter dem risikoneutralen Maß den Marktzins erwirtschaftet. Dies bedeutet für die Bewertung der Garantie zum Zeitpunkt t , dass die Pfade bis t mit den simulierten Ak-

tienrenditen berechnet werden und sich die Rendite ab t aus den simulierten Marktzinsen ergibt.

Dies klingt unkompliziert in der Theorie, erweist sich jedoch bei größeren Versicherungskollektiven als äußerst rechenintensiv, da jeder Vertrag einzeln bewertet werden muss. Liegen die generierten Szenarien bereits vor, dauert die Berechnung eines risikoneutralen Szenarios pro Vertrag je nach Rechenkapazität einige wenige Sekunden. Geht man von einer Dauer von 1.5 Sekunden aus, wie es in dieser Arbeit der Fall war, so liegt die benötigte Rechenzeit bereits pro Vertrag bei ungefähr 25 Minuten. Es lässt sich leicht erahnen, dass die Rechenzeit in der Praxis bei einem Kollektiv von mehreren tausend Verträgen sehr hoch ist. Dies ist umso schwerwiegender, da die Garantien in der Praxis auf monatlicher Basis berechnet werden.

Spätestens bei der Berechnung der Griechen für das Hedging vervielfacht sich die Rechenzeit noch einmal um ein mehrfaches, so dass ein Rechenzentrum für die Bewertung der Garantien benötigt wird. In der Praxis werden deshalb verschiedene statistische Verfahren eingesetzt, um die Berechnung der Garantien durch geeignete Approximierung zu beschleunigen. Zwei dieser Verfahren werden an dieser Stelle in aller Kürze vorgestellt, dabei handelt es sich zum einen um die Clusteranalyse, sowie um das Least Squares Monte Carlo Verfahren.

Der Hintergedanke bei der Implementierung einer Clusteranalyse ist, dass ähnliche Verträge auch ungefähr dieselben Bewertungen für die Garantien ergeben müssten. Im Extremfall wären dies zwei Menschen mit dem gleichen Geschlecht und Geburtstag, die zu denselben Konditionen einen Vertrag abgeschlossen haben. Für dieses Beispiel würden die Garantien ebenfalls gleich bewertet. Entsprechend versucht die Clusteranalyse Verträge mit ähnlichen Parametern zu identifizieren und diese in der Berechnung zusammenzufassen. Dazu müssen zum einen relevante Parameter identifiziert werden und zum anderen ein Distanzmaß bestimmt werden. Ähnliche Parameter haben dann eine sehr geringe Distanz zueinander und können durch eine Skalierung der Guthaben zusammen berechnet werden. Der Vorteil der Methode ist, dass die Anzahl der gewünschten Cluster der vorhandenen Rechenkapazität angepasst werden kann.

Ein anderer Ansatz ist die Least Square Monte Carlo Methode, die mittels statistischer Verfahren die benötigten Pfade für die risikoneutrale Bewertung stark reduziert. Die Methode wird eingehend von Bauer et al. (2010) beschrieben. In der Praxis wird der Ansatz vor allem bei der Bewertung von Optionen ange-

wendet. Das Grundprinzip ist die Berechnung der Pfade bis zum Bewertungszeitpunkt t anhand der bekannten Simulation. Für die risikoneutrale Bewertung wird anschließend eine geringe Zahl an Pfaden berechnet, für die der Wert der Garantien dann bekannt ist, die jedoch äußerst unpräzise im Hinblick auf den wahren Wert der Garantien sind. Anhand einer Polynom Regression lässt sich jedoch aus den unpräzisen Werten eine relativ genaue Vorhersage bezüglich der wahren Werte treffen.

7 Zusammenfassung

Variable Annuitäten sind ein Versicherungsprodukt für den Lebensabend. Bestehendes Vermögen wird am Kapitalmarkt angelegt, die Garantien bieten eine Sicherheit vor negativen Marktentwicklungen. Durch die Annuität wird das Vermögen langsam aufgezehrt, dennoch wird eine Rente bis zum Lebensende gezahlt. Bei vorzeitigem Tod profitieren die Hinterbliebenen hingegen von einem besicherten Restwert.

Die Risiken für den Versicherungsnehmer bleiben dabei überschaubar. Variable Annuitäten bieten vor allem die Sicherheit des Geldes und Sorglosigkeit bezüglich der zusätzlichen Rente. Verlieren tut man bei diesem Produkt lediglich wenn die Märkte sich über Jahre hinweg überdurchschnittlich entwickeln. Beim Kauf einer Variablen Annuität gilt es somit für den Versicherungsnehmer die unbekannten Opportunitätskosten gegenüber den gebotenen Sicherheiten abzuwägen.

Auch für den Versicherer sind Variable Annuitäten ein lohnendes Geschäft, vorausgesetzt die Modellierung in Kapitel 3 entspricht realistischen Szenarien. Für die gegebenen Vertragsparameter weisen lediglich zwei der tausend simulierten Pfade ein negatives Ergebnis auf, für alle anderen Pfade kann bei Vertragsende ein Gewinn verbucht werden.

Schwerpunkt dieser Arbeit war die Berechnung der Reserven und der Rückstellungen um die Auszahlungen an die Versicherungsnehmer auch unter adversen Bedingungen sicherzustellen. Dazu wurden beide Variablen in Kapitel 4 für die simulierten Szenarien betrachtet. Anhand des Value at Risk konnten dann die Reserven zur Deckung aller Zahlungsverpflichtungen für ein Jahr berechnet werden. Um darüber hinaus die Solvenz über die gesamte Vertragslaufzeit zu gewährleisten wurden die Rückstellungen als Barwert aller Gebühreneinnahmen abzüglich zukünftiger Auszahlungen berechnet. Anhand der beiden Variablen ergibt sich der Gewinn des Versicherers als nicht benötigte Reserven zuzüglich der überschüssigen Gebühren, die nicht zur Bildung der Rückstellungen verwendet wurden.

Da das Risikomanagement in Form der berechneten Reserven und Rückstellungen zum Teil sehr stark auf Änderungen in den Szenarien reagiert, wurde in Kapitel 5 abgeschätzt, wie sich Schocks auf den Aktienmarkt, den Zins und die Sterbetafel auf die Zahlungsströme auswirken. Um gegen solche Modellrisiken gefeit zu sein, werden zusätzliche Rückstellungen gebildet, deren Höhe von den Zahlungsströmen der geschockten Szenarien abhängt. Art und Höhe der Schocks

werden wiederum von den Aufsichtsbehörden jedes Landes vorgegeben. Unklar bleibt die Robustheit der Schätzungen in dieser Arbeit, die Ausprägungen der Schätzer konnten in Abschnitt 5.2 lediglich für die Copula bestätigt werden. Die zeitliche Struktur der Zeitreihen für den Aktienindex und den Zins erschweren dagegen die Überprüfung der Schätzungen anhand von Bootstrap, so dass nicht klar ist, ob die verwendeten Schätzer die Realität plausibel abbilden.

Diese Arbeit bietet somit einen grundlegenden Rahmen für das Risikomanagement von Variablen Annuitäten. Erweiterungen sind vor allem bei der Simulation der Szenarien denkbar, die verwendeten Modelle weisen deutliche Schwachstellen auf, die durch komplexere Verfahren behoben werden könnten. Doch auch der Vertrag an sich kann beispielsweise durch monatliche Auszahlungen oder zusätzliche Garantien erweitert werden.

Die Grundlagen des Risikomanagements in der Lebensversicherung und speziell bei Variablen Annuitäten können jedoch anhand dieser Arbeit nachvollzogen werden. Für den Versicherer wie für den Verbraucher gilt, die Risiken des Produkts genau zu erkennen um mögliche Chancen abzuschätzen.

Literatur

- Aas, K., C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and economics* 44(2), 182–198.
- Arrow, K. J. and G. Debreu (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 265–290.
- Bauer, D., D. Bergmann, and A. Reuss (2010). Solvency ii and nested simulations—a least-squares monte carlo approach. In *Proceedings of the 2010 ICA congress*.
- Bauer, D. K., A. Kling, and J. Russ (2008). A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities. *ASTIN Bulletin-Actuarial Studies in Non Life Insurance* 38(2), 621.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The review of economics and statistics*, 542–547.
- Broadie, M. and P. Glasserman (1996). Estimating security price derivatives using simulation. *Management science* 42(2), 269–285.
- Chen, L. (1996). *Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Three-factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Applications in Derivatives Pricing and Risk Management*. Blackwell publishers.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll Jr, and S. A. Ross (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 385–407.
- Hull, J. and A. White (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of financial studies* 3(4), 573–592.
- Kladivko, K. (2007). Maximum likelihood estimation of the cox-ingersoll-ross process: the matlab implementation. In *Technical Computing Prague*. working paper.

- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1992). Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance* 47(4), 1259–1282.
- Massey Jr, F. J. (1951). The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American statistical Association* 46(253), 68–78.
- Politis, D. N. and H. White (2004). Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Econometric Reviews* 23(1), 53–70.
- Ruppert, D. (2011). *Statistics and data analysis for financial engineering*. Springer Science and Business Media.
- Shao, A. (2012). *A fast and exact simulation for CIR process*. Ph. D. thesis, University of Florida.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics* 5(2), 177–188.

A Übersicht über die Zahlungsströme

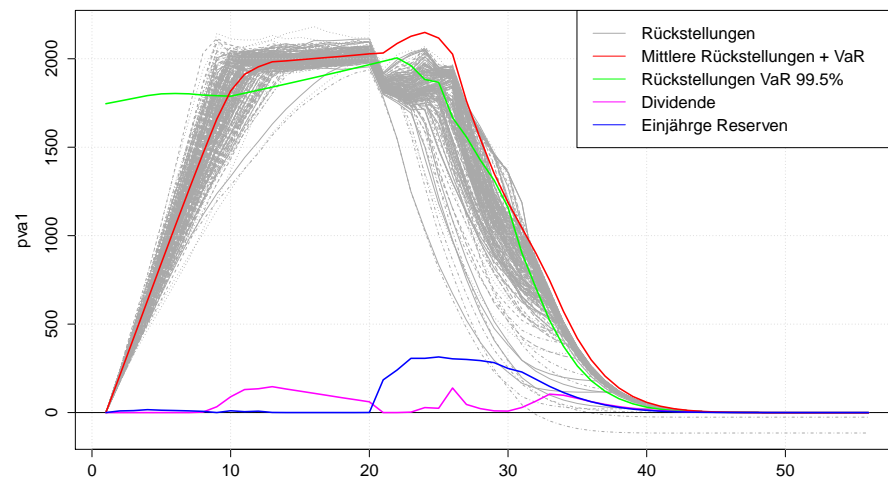
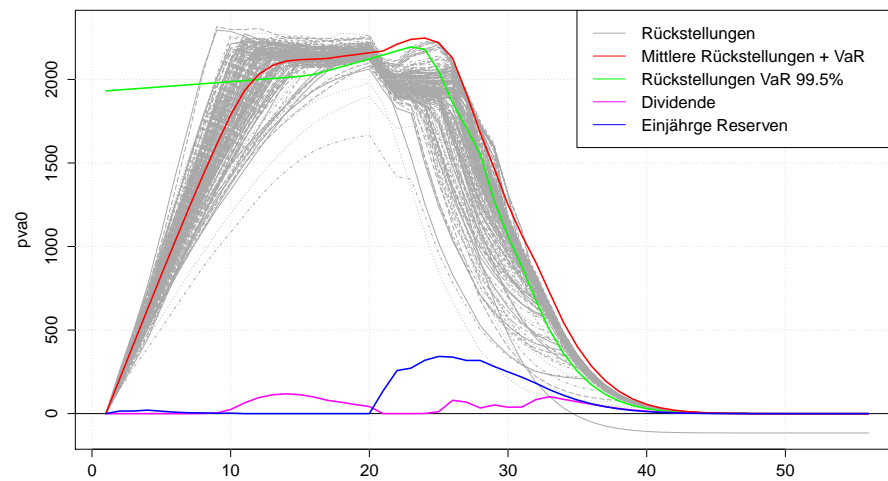
Dargestellt sind die Zahlungsströme für einen zufällig ausgewählten Pfad. über die Gesamtdauer des Vertrags.

Year	AcV	Return	Annuity	GMWB Base	GMDB	WB Claims	DB Claims	Fees
0	10000	0%	0	10000	10000	0	0	0
1	8347.23	-10.34%	500	10000	9500	0	12.25	168.54
2	8138.99	5.83%	500	10000	9000	0	10.22	162.36
3	7524.52	0.51%	500	10000	8500	0	12.94	148.07
4	6931.67	0.69%	500	10000	8000	0	15.77	134.32
5	6676.52	5.93%	500	10000	7500	0	13.44	127.15
6	6391.87	5.60%	500	10000	7000	0	10.9	119.39
7	6525.05	13.01%	500	10025.05	6500	0	0	119.28
8	6566.66	11.24%	501.25	10567.91	5998.75	0	0	117.22
9	5764.69	-2.58%	528.4	10567.91	5470.35	0	0	100.26
10	4884.54	-4.81%	528.4	10567.91	4941.96	0	1.37	82.57
11	4526.91	6.04%	528.4	10567.91	4413.56	0	0	74.17
12	4495.44	14.72%	528.4	10610.28	3885.17	0	0	71.17
13	3883.45	-0.06%	530.51	10610.28	3354.65	0	0	59.22
14	3345.4	1.81%	530.51	10610.28	2824.14	0	0	48.96
15	2997.67	8.67%	530.51	10704.05	2293.62	0	0	41.94
16	2842.08	17.77%	535.20	11083.66	1758.42	0	0	37.84
17	2272.54	1.36%	554.18	11083.66	1204.24	0	0	28.64
18	1789.98	6.29%	554.18	11139.92	650.05	0	0	21.22
19	1368.83	13.28%	557	11275.77	93.06	0	0	15.15
20	844.12	6.99%	563.79	11314.85	0	0	0	8.66
21	327.23	19.94%	565.74	11363.7	0	0	0	3.08
22	0	9.71	568.18	11363.7	0	101.35	0	0
23	0	0.34	568.18	11363.7	0	215.67	0	0
24	0	15.18	568.18	11363.7	0	192.81	0	0
25	0	8.07	568.18	11363.7	0	170.63	0	0
26	0	10.38	568.18	11363.7	0	149.28	0	0
27	0	2.42	568.18	11363.7	0	128.86	0	0
28	0	24.49	568.18	11363.7	0	109.5	0	0
29	0	9.05	568.18	11363.7	0	91.44	0	0
30	0	3.47	568.18	11363.7	0	74.90	0	0
31	0	24.35	568.18	11363.7	0	60.08	0	0
32	0	12.71	568.18	11363.7	0	47.13	0	0
33	0	11.58	568.18	11363.7	0	36.07	0	0
34	0	8.53	568.18	11363.7	0	26.87	0	0
35	0	2.80	568.18	11363.7	0	19.44	0	0
36	0	4.44	568.18	11363.7	0	13.66	0	0
37	0	2.21	568.18	11363.7	0	9.32	0	0
38	0	17.92	568.18	11363.7	0	6.17	0	0
39	0	12.00	568.18	11363.7	0	3.97	0	0
40	0	6.87	568.18	11363.7	0	2.48	0	0
41	0	1.75	568.18	11363.7	0	1.5	0	0
42	0	1.88	568.18	11363.7	0	0.88	0	0
43	0	10.15	568.18	11363.7	0	0.5	0	0
44	0	4.84	568.18	11363.7	0	0.27	0	0
45	0	12.72	568.18	11363.7	0	0.14	0	0
46	0	-0.35	568.18	11363.7	0	0.07	0	0
47	0	18.73	568.18	11363.7	0	0.03	0	0
48	0	6.17	568.18	11363.7	0	0.02	0	0
49	0	7.26	568.18	11363.7	0	0.01	0	0
50	0	13.47	568.18	11363.7	0	0	0	0
51	0	11.73	568.18	11363.7	0	0	0	0
52	0	-0.55	568.18	11363.7	0	0	0	0
53	0	1.40	568.18	11363.7	0	0	0	0
54	0	7.24	568.18	11363.7	0	0	0	0
55	0	3.56	568.18	11363.7	0	0	0	0

B Abkürzungsverzeichnis

- AcV: Account Value
- BOP: Beginning of Period
- DB : Death Benefit
- EOP: End of Period
- GMAB: Guaranteed Minimum Accumulation Benefit
- GMIB: Guaranteed Minimum Income Benefit
- GMDB: Guaranteed Minimum Death Benefit
- GMWB: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit
- SOA: Society of Actuaries
- WB : Withdrawal Benefit

C Rückstellungen für verschiedene Zinsniveaus



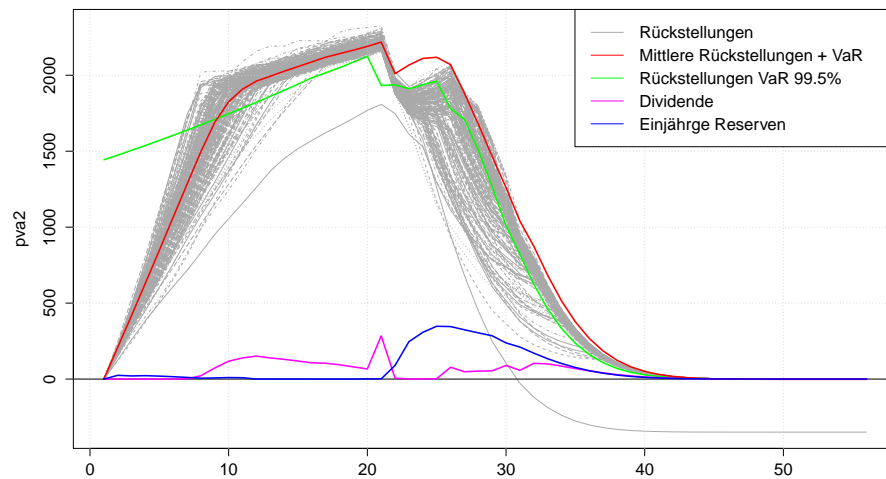


Abbildung 27: Rückstellungen für ein Zinsniveau von 2.5%

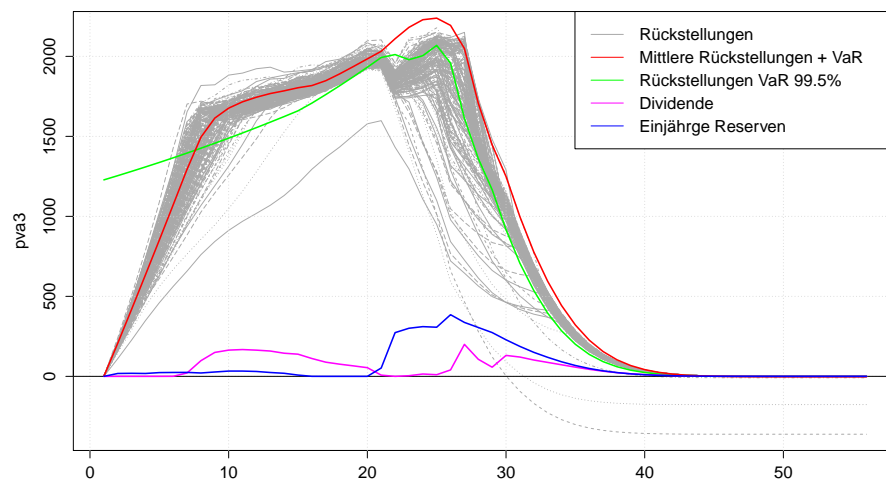


Abbildung 28: Rückstellungen für ein Zinsniveau von 3.5%

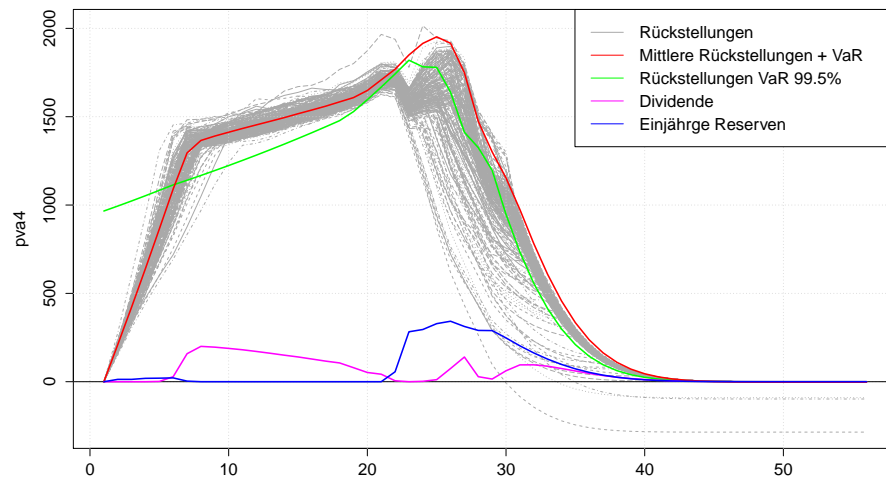


Abbildung 29: Rückstellungen für ein Zinsniveau von 4.5%